Entwicklung eines relativistischen Atommodells

Dr. sc. Petra Schopf

21. Oktober 2014

1 Einleitung

Das Modell der Riemannschen Mannigfaltigkeit, genannt Raumzeit, für die Betrachtung des Makrokosmos ist weit verbreitet. Die Frage ist dann immer die Frage nach der Metrik auf der Mannigfaltigkeit. Zu den bekanntesten gehören die Scwarzschild-, Kerr- und Robertson-Walker-Metrik. Diese Metriken wurden meist aus der Annahme der Einsteinschen Feldgleichung und zusätzlichen vereinfachenden Annahmen bezüglich des Raumes gefunden. Man kann diese Metriken auch mit rein mathematischen Annahmen bestimmen.
Wir werden in diesem Artikel das Modell der Riemannschen Mannigfaltigkeit auf die Mikrowelt, das Atom anwenden. Insbesondere ein Atom als Schwarzschild-Raumzeit ansehen und daraus strukturelle Schlussfolgerungen und Bindungen erklären.

2 Die Schwarzschild-Raunzeit

Unsere tägliche Erfahrung ist ein dreidimensionaler Raum, Länge, Breite und Tiefe. Da (philosophisch) die Existenzform des Sein die Bewegung ist, fügen wir in unserem Modell noch eine weitere Koordinate ein, die die Veränderung, Bewegung beschreiben soll. Diese wird traditionell Zeit t genannt. Diese Bezeichnung ist zwar etwas verwirrend, da es - wie uns Einstein klar machte - keine absolute Zeit gibt, ist aber so allgemein eingeführt. Alle kräftefreien Bewegungen - von Materieteilchen (im Unterraum $ds^2 \neq 0$) und Photonen (im Unterraum $ds^2 = 0$) - sind dann nur auf Geodäten möglich.
Das Schwarzschild-Raumzeit-Modell geht von einem definierten Zentrum des Raumteils der Raumzeit aus. In dieses Zentrum legen wir den Koordinatenursprung und das Zentrum sei durch eine Masse (Energie) von M charakterisiert. Für die Schwarzschild-Metrik ist es sinnvoll den dreidimensionalen Raumteil in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) gegeben zu denken. Hierbei ist r der Radius (Abstand zum Koordinatenursprung), ϑ der Polarwinkel (Winkel des Radiusvektors zur z-Achse) und φ der Azimutwinkel (Winkel der Projektion des Radiusvektors auf die xy-Ebene zur x-Achse). Offensichtlich gilt $r \in \mathbf{R}^+, \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [-\pi, \pi]$. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir diese vier Raumzeit-Koordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ auch mit (x_0, x_1, x_2, x_3)

$$x_0 = t,\ x_1 = r,\ x_2 = \vartheta,\ x_3 = \varphi. \tag{1}$$

In diesen Koordinaten ist $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times_r S^2$ und die Schwarzschild-Metrik wird gegeben durch

$$ds^2 = -kdt^2 + k^{-1}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2), \tag{2}$$

$k = k(r) = 1 - 2M/r$, M = Masse des Zentrum (richtiger der Krümmungsparameter Metrik).
Wir haben $c = G = 1$ gesetzt. Mit dieser Annahme spricht man von relativistischen (geometrisierten) Maßeinheiten. Wir werden durchgängig diese benutzen. Wegen $c = 1$ ist die Längeneinheit $1m$ gleichzeitig eine Zeiteinheit (d.h. eine Bewegungseinheit), nämlich die Zeit (Bewegung, Energie), die das Licht für die Strecke von 1m benötigt:

$$1Sekunde = 2,99792 \cdot 10^8 m. \tag{3}$$

Aus $G = 1$ (Gravitationskonstante) folgt dann aus der klassischen Maßeinheit für $G = 6,673 \cdot 10^{-27} m^3/(kg \cdot s^2)$, daß

$$1kg = 7,425 \cdot 10^{-28} m. \tag{4}$$

In diesen Koordinaten ist die Schwarzschildmetrik (2) bei $r = 2M$ singulär (Schwarzschildsphäre). Es sei hier nur bemerkt, daß dies nur eine Koordinatensingularität mit nicht zu vernachlässigender physikalischer Bedeutung ist.
Auch in der Mikrowelt, dem Atom, liegt die Schwarzschild-Sphäre innerhalb des Atomkerns. Deshalb wird es für uns ausreichend sein die Scwarzschild-Raumzeit nur außerhalb der Schwarzschildsphäre zu betrachten. Der Einfachheit halber betrachten wir im Weiteren die Schwarzschild-Raumzeit nur außerhalb der Schwarzschildsphäre:

$$U = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times_r S^2 \setminus \{t, r, \vartheta, \varphi) : r \leq 2M\}$$

oder

$$U = (\mathbf{R} \times (2M, +\infty) \times_r S^2) \tag{5}$$

Mit Hilfe der Metrik kann ein **Skalarprodukt** definiert werden:

$$\langle (t^1, r^1, \vartheta^1, \varphi^1), (t^2, r^2, \vartheta^2, \varphi^2) \rangle = -kt^1t^2 + k^{-1}r^1r^2 + r^2(\vartheta^1\vartheta^2 + sin^2\vartheta\varphi^1\varphi^2)$$

Die Kugelkoordinaten sind offensichtlich in diesem Skalarprodukt orthogonal.
Eine **Geodäte** ist (im Maßstab der Schwarzschild-Metrik (2)) die lokal kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. In der Schwarzschild-Raumzeit ist eine Geodäte

$$\gamma = \{(t(s), r(s), \vartheta(s), \varphi(s)) : s \in (a, b)\}$$

durch nachfolgendes Gleichungssystem gegeben

Satz 1 (Geodätengleichung) *In der Schwarzschild-Raumzeit lauten die Geodätengleichungen*

$$\frac{d}{ds}[g_{jj}(\frac{dx_j}{ds})] = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j}(\frac{dx_i}{ds})^2, j = 0, ..., 3 \tag{6}$$

wobei $g_{00} = -k, g_{11} = k^{-1}, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 sin\vartheta$
und $x_0 = t, x_1 = r, x_2 = \vartheta, x_3 = \varphi$.

□

Die Raumzeit-Koordinate t ist als Koordinate der allgemeinen Bewegung angesehen, es ist also eigentlich keine Meßgröße. Da alle natürlichen (kräftefreien) Bewegungen auf Geodäten stattfinden, ist die eigentliche zeitliche Meßgröße der auf der Geodäte zurückgelegte Weg. Diese (meßbare) Zeit wird Eigenzeit τ genannt (das Vorzeichen ist wegen der Orientierung Vergangenheit Zukunft gewählt):

$$d\tau^2 = -ds^2. \tag{7}$$

Da Photonen sich auf Geodäten mit Lichtgeschwindigkeit bewegen sollen und die Lichtgeschwindigkeit als die im Raumteil maximal mögliche angenommen wird, muß also für Photonen gelten

$$ds^2 = 0. \tag{8}$$

Mit anderen Worten, Photonen haben keine Eigenzeit, sie sind zu jeden (Eigen-) Zeitpunkt überall.
In der Schwarzschild-Raumzeit ist jede Geodäte durch zwei Konstanten E und L (und der radialen Tangente $dr/d\tau$) bestimmt. Die Konstante E ist die Energie pro Masseeinheit im Unendlichen oder kurz Energie (ist Eigenschaft der Geodäte) und die Konstante L ist wegen des zweiten Keplerschen Gesetzes (die Fläche der gezogenen Fahrstrahlen pro Zeiteinheit ist konstant) der Drehimpuls pro Maßeinheit oder kurz Drehimpuls. Es gilt

Satz 2 (Bewegungsgleichungen) *Es sei* γ *eine Geodäte in* U *(siehe (5)). Dann existieren zwei Konstanten* L *und* E *derart, daß:*

$$\begin{aligned}
&(a) \quad k\frac{dt}{ds} = E \\
&(b) \quad r^2 sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{ds} = L \\
&(c) \quad \frac{d}{ds}[r^2\frac{d\vartheta}{ds}] = r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta(\frac{d\varphi}{ds})^2
\end{aligned} \tag{9}$$

□

Eine auf den ersten Blick scheinbare Sondergruppe von Geodäten sind

Definition 1 (äquatorial beginnend). Eine Kurve $\gamma : I \to U$ heißt äquatorial beginnend relativ zu den sphärischen Koordinaten ϑ, φ auf S^2, falls

$$\vartheta(0) = \frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad \frac{d\vartheta}{ds}(0) = 0 \tag{10}$$

□

Offensichtlich ist mit 0 als Startpunkt und nach geeigneter Rotation **jede** Kurve äqutorial beginnend relativ zu den neuen nach Rotation erhaltenen sphärischen Koordinaten. Aus der Gleichung (9) der Bewegungsgleichungen und der Eigenschaft äquatorial beginnend (jede Geodäte ist in einem geeigneten Koordinatensystem äquatorial beginnend) folgt

Satz 3 (ebene Geodäte) *Es sei γ eine äquatorial beginnende Geodäte in U. Dann gilt:*

$$\vartheta \equiv \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

Das heißt, jede Geodäte der Schwarzscild-Raumzeit liegt räumlich in einer Ebene (durch den Koordinatenursprung).

□

S. Chandrasekhar hat in [1] alle möglichen Geodäten der Schwarzschild-Raumzeit beschrieben. Eine Geodäte heißt **gebunden**, wenn $r_0 \leq r(s) \leq r_1$ und $L > 0$. Über ... hinausgehend gilt **alle gebundenen Geodäten** der Schwarzschild-Raumzeit liegen im Raumteil in einer Ebene (siehe [2]).

Satz 4 (Verteilung gebundener Geodäten) *In der Schwarzschild-Raumzeit gibt es ein durch Rotation erreichbares Koordinatensystem derart, daß* ***alle*** *gebundenen Geodäten in der Ebene*

$$\vartheta = \tfrac{\pi}{2}$$

liegen.

Mit anderen Worten, ***alle*** *gebundenen Geodäten liegen im Raumteil in einer Ebene.*

□

Definition 2 (Potential). Es sei γ eine Geodäte in der Schwarzschild-Raumzeit mit der Metrik (2) und es seien E und L die Energie und der

Drehimpuls dieser Geodäten (siehe Satz 3). Die effektive potentielle Energie, das Potential, V der Geodäte γ ist

$$\begin{aligned} V(r) &= (1+\frac{L^2}{r^2})k(r) \\ &= 1-\frac{2M}{r}+\frac{L^2}{r^2}-\frac{2ML^2}{r^3} \end{aligned} \tag{12}$$

$\square$

Es sei bemerkt, das Potential einer Geodäte ist eine Funktion (von r) die von der Energie E der Geodäte unabhängig ist.

Die **Energiegleichung** einer Geodäte hat dann die Form

$$E^2 = (\frac{dr}{d\tau})^2 + V(r). \tag{13}$$

Aus dem Geodäten-Gleichungssystem erhält man für $j = 1$

Satz 5 (Geodätengleichung für die r-Koordinate) *Es gilt*

$$2\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{dV}{dr}. \tag{14}$$

$\square$

Es sei γ eine Geodäte mit von Null verschiedenem Drehimpuls $L \neq 0$ und das Koordinatensystem sei so rotiert, daß $\vartheta = \pi/2$. Aufgrund der Bewegungsgleichungen ist dann $d\varphi/ds \neq 0$. Folglich kann die Koordinate $r = r(s)$ auch als Funktion von φ angesehen werden, $r = r(\varphi)$. Diese Kurve in der Äquatorebene ist von besonderer Bedeutung.

Definition 3 (Orbit). Es sei γ eine Geodäte in der Schwarzschild-Raumzeit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times_r S^2$. Das Koordinatensystem ist so rotiert, daß γ in der Äquatorebene $\vartheta \equiv \pi/2$ liegt. Mit $\vec{\gamma}$ bezeichnen wir das Bild von γ unter der Projektion

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times_r S^2 \to \mathbf{R}^+ \times_r S^2.$$

Das Bild der Äquatorebene $\vartheta \equiv \pi/2$ unter dieser Projektion heißt **Orbitalebene** und das **Orbit** ist die von $\vec{\gamma}$ gezeichnete Bahnkurve.

$\square$

Nach Ausführung der Transformation $u = 1/r$, $r > 0$ und des Übergangs von s zu φ und anschließender Differentation nach φ wird die Energiegleichung (13) zu

Satz 6 (Orbitalgleichungen) *Für ein frei fallendes Materieteilchen γ in der äußeren Schwarzschild-Raumzeit mit Drehimpuls $L \neq 0$ gilt:*

$$\begin{aligned} L^2(\frac{du}{d\varphi})^2 &= E^2 - (1 + L^2u^2)(1 - 2Mu), \\ \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u &= \frac{M}{L^2} + 3Mu^2, \end{aligned} \tag{15}$$

wobei $u = 1/r$ und $r = r \circ \gamma$.

□

Im Weiteren setzen wir immer, ohne stets darauf hinzuweisen, voraus, daß es sich um **gebundene Geodäten** handelt (dann ist immer $L^2 > 0$ vorausgesetzt).

Aus den Orbitalgleichungen ist die wichtige Eigenschaft der Periheldrehung der gebundenen Geodäten ersichtlich. Der reziproke Radiusstrahl $u = u(\varphi)$ hat maximal 3 kritische Punkte $u'(\varphi_i) = 0$:

$$0 = 2ML^2u^3 - L^2u^2 + 2Mu - (1 - E^2). \tag{16}$$

Da wegen der Energiegleichung $E^2 \geq V(1/u)$ und die Geodäte gebunden ist, gibt es genau zwei kritische Punkte zwischen denen der reziproke Radiusstrahl oszilliert (Potentialmulde). Das bedeutet unter anderem, die Diskriminante D der letzten kubischen Gleichung ist nicht negativ, $D \leq 0$:

$$D = \frac{1}{4L^6}\left[(\frac{L}{M})^4 + (3(1 - 3(1 - E^2))^2 - 4)(\frac{L}{M})^2 + 16\right] \leq 0. \tag{17}$$

Die Funktion $u = u(\varphi)$ beschreibt nach φ_{ph}-Umdrehungen wieder den gleichen Punkt in der Äquatorebene. Die Abweichung des Wertes φ_{ph} von 2π heißt **Periheldrehung** δ der gebundenen Geodäte γ. **Apo--** und **Perihel** sind der größte und kleinste Wert des Radarstrahls r. Sie werden in den kritischen Punkten $u'(\varphi) = 0$ erreicht. Das Potential erlaubt die Orbits der Geodäten einfach (aber grob) zu klassifizieren.

(*a*) $L^2 < 12M^2$

dann sind nur Crash Orbit und Crash/escape Orbit möglich.

(*b*) $12M^2 < L^2 < 16M^2$

dann sind Crash Orbit, gebundener Orbit und Crash/escape Orbit möglich.

(*c*) $L^2 > 16M^2$

dann sind Crash Orbit, gebundener Orbit, Flyby Orbit, und Crash/escape möglich

Abbildung 1: Mögliche Orbits

Diese Fälle sind in Abbildung 1 dargestellt. **Bemerkung**. Aus der Grafik des Potentials ist ersichtlich, daß nur dann und nur dann ein gebundener Orbit vorliegt, wenn

$$L^2 > 12M^2 \tag{18}$$

$$E^2 \geq V(r_{min}) \tag{19}$$

$$E^2 < \min\{V(r_{max}), 1\}. \tag{20}$$

3 Periheldrehung gebundener Geodäten

In diesem Abschnitt beschreiben wir die für die Entwicklung des relativistischen Atommodells sehr wichtige Periheldrehung gebundener Geodäten.
Gemäß Satz 4, Verteilung gebundener Geodäten, können wir das Koordinatensystem (durch Rotation) so wählen, daß **alle** gebundenen Geodäten in der Äquatorebene $\vartheta \equiv \pi/2$ liegen. Damit sind die zu betrachtenden Orbits ebene Kurven in der Orbitalebene, die in (ebenen) Polarkoordinaten in der Form $r = r(\varphi)$ gegeben sind.
Wegen der Gundenheit gilt immer $L^2 > M^2$. Die Geodäte γ heißt Geodäte mit **mittlerem Drehimpuls**, wenn $12M^2 < L^2 < 16M^2$ und
mit **hohem Drehimpuls**, wenn $L^2 > 16M^2$.
Die Abhängigkeit des Potentials V von L^2 bezeichnen wir auch mit $V(r) = V(r, L^2)$. Für $12M^2 < L^2 < 16M^2$ ist das lokale Maximum der Potentialkurve kleiner als eins, für $L^2 = 16M^2$ gleich eins und für $L^2 > 16M^2$ größer als eins. Das lokale Maximum des Potentials $V(r)$ sei $V(r_{max})$ und das lokale Minimum $V(r_{min}$. Einige wichtige leicht nachzuprüfende Relationen

$(L^2 > 12M^2)$:

$$\begin{aligned}
V((r_{max}, 16M^2) &= 1,\\
V(r_{min}, 16M^2) &= \frac{25}{27},\\
V(2M) &= 0,\\
\lim_{r\to+\infty} V(r) &= 1-0,\\
r_{max} &= \frac{L^2}{2M} - \frac{|L|}{2M}\sqrt{L^2-12M^2},\\
r_{min} &= \frac{L^2}{2M} + \frac{|L|}{2M}\sqrt{L^2-12M^2},\\
\lim_{L^2\to+\infty} r_{max} &= 3M,\\
\lim_{L^2\to+\infty} r_{min} &= +\infty.
\end{aligned} \tag{21}$$

Für $L^2 > 16M^2$ gilt

$$\begin{aligned}
&V(r_{max}) > 1\\
&V(r_{min}) < 1,\\
&V(r) = 1 \Leftrightarrow r = \frac{L^2}{4M}(1 \pm \sqrt{1-\frac{16M^2}{L^2}}).
\end{aligned} \tag{22}$$

Der letzte Zusammenhang bedeutet, daß für gebundene Geodäten γ

$$\max\{ \frac{L^2}{4M}(1+\sqrt{1-\frac{16M^2}{L^2}}), \frac{L^2}{2M} - \frac{|L|}{2M}\sqrt{L^2-12M^2}\} \leq Perihel. \tag{23}$$

Die rechte Nullstelle der Gleichung $V(r) = 1$ (d.h. der Grenzwert des kleinstmöglichen Perihels einer gebundenen Geodäte mit dem Drehimpuls $L^2 > 16M^2$) ist monoton wachsend bezüglich L. Tatsächlich

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dL^2}\left[\frac{L^2}{4M}(1+\sqrt{1-\frac{16M^2}{L^2}})\right] &= \frac{1}{4M}(1+\sqrt{1-\frac{16M^2}{L^2}})\\
&+ \frac{L^2}{4M}(\frac{16M^2}{2L^4\sqrt{1-\frac{16M^2}{L^2}}})\\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{24}$$

Es sei γ eine gebundene Geodäte. Für die Herleitung der Gleichung des Orbit folgen wir ... [1]. Wie bereits festgestellt hat

$$\tfrac{1}{L^2}\left(E^2-(1+L^2u^2)(1-2Mu)\right)$$

genau drei reelle Nullstellen $u_1 \le u_2 \le u_3$, die folgend dargestellt werden können

$$u_1=\frac{1-\epsilon}{p},\ u_2=\frac{1+\epsilon}{p},\ u_3=\frac{1}{2M}-\frac{2}{p}. \tag{25}$$

Wegen $u_1>0$, $E^2<1$ und $u_1 \le u_2 \le u_3$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \le & \epsilon < 1 \\ \frac{1}{2M}-\frac{2}{p} &\ge \frac{1+\epsilon}{p} \\ p &\ge 2(3+\epsilon)M. \end{aligned} \tag{26}$$

Über Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned} u_1+u_2+u_3 &= \frac{1}{2M} \\ u_1u_2u_3 &= \frac{1-E^2}{2ML^2} \\ \frac{M}{L^2} &= \frac{1}{p^2}\left[p-M(3+\varepsilon^2)\right] \\ \frac{1-E^2}{L^2} &= \frac{1}{p^3}(p-4M)(1-\varepsilon^2) \\ u_1 &= \frac{1}{p}-\sqrt{\frac{1}{p^2}-\frac{(1-E^2)p}{L^2(p-4M)}}=\frac{1-\varepsilon}{p}, \\ u_2 &= \frac{1}{p}+\sqrt{\frac{1}{p^2}-\frac{(1-E^2)p}{L^2(p-4M)}}=\frac{1+\varepsilon}{p} \\ \frac{\varepsilon}{p} &= \sqrt{\frac{1}{p^2}-\frac{(1-E^2)p}{L^2(p-4M)}}, \\ \varepsilon^2 &= 1-\frac{(1-E^2)p^3}{(p-4M)L^2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Da $u_1>0$ muß folglich

$$\begin{gathered} \frac{1}{p^2} \ge \frac{(1-E^2)p}{L^2(p-4M)},\ d.\ h. \\ (1-E^2)p^3-L^2p+4ML^2 \le 0 \end{gathered} \tag{28}$$

Letzteres ist dann und nur dann erfüllt, wenn diese bezüglich p kubisches Polynom eine doppelte und eine einfache oder drei unterschiedliche reelle

Wurzeln hat. Das bedeutet die Diskreminante der kubischen Gleichung ist nicht positiv. Mit anderen Worten

$$L^2 \geq 108(1-E^2)M^2 \tag{29}$$

Wegen der Oszillation von u zwischen u_1 und u_2 können wir die Substitution

$$u = \frac{1}{p}(1+\varepsilon\cos\chi) \tag{30}$$

ausführen. Für $\chi = 0$ befindet sich u im Perihel, für $\chi = \pi$ im Apohel und wenn sich χ von 0 bis 2π ändert, so hat u eine volle Periode durchlaufen. Die Gleichung (15) wird mit dieser Variablentransformation zu (der Winkel φ wird ab dem Apohel mit $\chi = \pi$ gemessen) einer integrierbaren Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\varphi = \varphi(\chi) &= \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{p-6M+2M\varepsilon}}F(\frac{\pi-\chi}{2};m),\ \textit{wobei} \\
F(\psi;m) &= \int_0^{\psi}\frac{1}{\sqrt{1-m^2\sin^2\gamma}}d\gamma,\ \textit{und} \\
m^2 = m^2(p,\varepsilon) &= \frac{4M\varepsilon}{p-6M+2M\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Die Funktion $F(\psi;k)$ ist ein unvollständiges elliptisches Integral erster Art. Wegen $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ gilt

$$\begin{aligned}
m^2 &\leq 1, \\
p-6M+2M\varepsilon &> 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Für eine vollständige Periode von u vom Apohel bis zum erneuten Apohel ändert sich die Variable χ von π bis 3π. Aus (31) folgt dann, daß der (Koordinaten-)Winkel φ sich von $\varphi(\pi)$ bis $\varphi(3\pi)$ ändert. D.h. für eine vollständige Periode von u ergibt sich unter Beachtung der Monotonie der Funktion $\varphi = \varphi(\chi)$

$$\begin{aligned}
\varphi_{pd} &= \varphi(\pi) - \varphi(3\pi) \\
&= \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{p-6M+2M\varepsilon}}F(0,m) - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{p-6M+2M\varepsilon}}F(-\pi,m) \\
&= \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{p-6M+2M\varepsilon}}F(\pi,m) \\
&= \frac{4\sqrt{p}}{\sqrt{p-6M+2M\varepsilon}}K(m),\ \textit{wobei} \\
K(m) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-m^2\sin^2\gamma}}d\gamma.
\end{aligned} \tag{33}$$

Da $K(m) \geq \pi/2$ und $0 \leq \varepsilon < 1$ gilt

$$\varphi_{pd} \geq \sqrt{\frac{p}{p - 6M + 2M\varepsilon}}\ 2\pi > \sqrt{\frac{p}{p - 4M}} 2\pi \geq 2\pi. \tag{34}$$

Die **Periheldrehung** δ einer Geodäte mit gebundenem Orbit ist somit gleich $\delta = \varphi_{pd} - 2\pi$:

$$\delta = \frac{2K(m)\sqrt{p} - \pi\sqrt{p - 6M + 2M\varepsilon}}{\pi\sqrt{p - 6M + 2M\varepsilon}} 2\pi. \tag{35}$$

Mit Hilfe der Amplitudenfunktion $am(u; m)$, der Umkehrfunktion der elliptischen Funktion $u = F(\varphi; m)$ und $\varphi = am(u; m)$, und des Cosinus Amplitudinis $cn(u; m) = \cos(am(u; m))$ ist der Radiusvektor $r(\varphi)$ durch (31) gegeben mit

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \chi(\varphi)} \\ &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\pi - 2am(\frac{\varphi}{a}; m))} \\ &= \frac{p}{1 + \varepsilon - 2\varepsilon(cn(\frac{\varphi}{a}; m))^2},\ \textit{wobei} \\ a &= \frac{2}{\sqrt{1 - 6\mu + 2\varepsilon\mu}} \end{aligned} \tag{36}$$

Da

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{4p\varepsilon}{a(1 + \varepsilon - 2\varepsilon cn^2(\varphi/a; m))^2} cn(\varphi/a; m) sn(\varphi/a; m) dn(\varphi/a; m) \tag{37}$$

sind die kritischen Punkte (lokales Minimum und lokales Maximum) der Funktion $r(\varphi)$ die beiden Punkte $p/(1 + \varepsilon)$ und $p/(1 - \varepsilon)$. Das bedeutet das Orbit der Geodäte befindet sich im Kreisring mit diesen beiden Radien.
Hier noch eine kurze Schlußfolgrung aus der Energiegleichung (13). Da Peri- und Apohel kritische Punkte der Funktion $r = r(\varphi)$ folgt aus der Energiegleichung $V(r_{min}) = V(r_{max})$ und aus $r_{min} = p/(1 + \varepsilon)$, $r_{max} = p/(1 - \varepsilon)$

$$\begin{aligned} 0 &= M - \frac{L^2}{p} + \frac{ML^2(3 + \varepsilon^2)}{p^2} \\ &= 1 - \frac{L^2}{M^2}\mu\left[1 - (3 + \varepsilon^2)\mu\right],\ \textit{wobei} \\ \mu &= \frac{M}{p} \end{aligned} \tag{38}$$

Andererseits folgt aus (27)

$$1 - E^2 = \frac{\mu(1 - 4\mu)(1 - \varepsilon^2)}{1 - (3 + \varepsilon^2)\mu}. \tag{39}$$

Das Zusammenfügen von (38) und (39) ergibt

$$1 - E^2 = \frac{L^2}{M^2}(1-\varepsilon^2)\mu^2(1-4\mu). \tag{40}$$

Der Vergleich von (39) und (40) führt zu

$$1 = \frac{L^2}{M^2}\mu(1-(3+\varepsilon^2)\mu) \tag{41}$$

oder

$$\mu = \frac{1}{2(3+\varepsilon^2)}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4(3+\varepsilon^2)M^2}{L^2}}\right]. \tag{42}$$

4 Geodäten mit stehender Welle

In diesem Abschnitt definieren eine Untermenge der gebundenen Geodäten. Diese Untergruppe ist ausschlaggebend für die Elektronen eines Atoms.
Definition 4 (Geodäte der Frequenz $\mathbf{l} \in \mathbf{N}$). Eine Geodäte γ mit gebundenem Orbit (d.h. $L^2 > 12M^2$ und $E^2 < \min\{V(r_{max}), 1\}$) heißt Geodäte mit stehender Welle der Frequenz $l \in \mathbf{N}$ oder kurz Geodäte der Frequenz l, wenn für die Periheldrehung δ der Geodäte γ gilt

$$l = \frac{2\pi}{\delta} \in \mathbf{N},\ l = 1, 2, ... \tag{43}$$

□
Es sei γ eine Geodäte mit der Frequenz l. Das Orbit dieser Geodäte ist die Kurve

$$\vec{\gamma} = \{(r, \varphi, \frac{\pi}{2}) \in \mathbf{R}^+ \times S^2 : r = r(\varphi)\}. \tag{44}$$

Die Projektion des Orbits in die Orbitalebene bezeichnen wir ebenfalls mit $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \{(r, \varphi) \in \mathbf{R}^+ \times S^1 : r = r(\varphi)\}. \tag{45}$$

Aus dem Kontext wird immer ersichtlich sein, ob das Orbit in $\mathbf{R}^+ \times S^2$ oder in $\mathbf{R}^+ \times S^1$ betrachtet wird. Das Orbit, die Bahnkurve $\vec{\gamma}$ einer Geodäte der Frequenz l ist eine geschlossene ebene Figur endlicher Länge, da nach einer endlichen Anzahl von Umläufen von (Apo-) Perihel zu (Apo-) Perihel genau die Ausgangsposition in der Ebene wieder erreicht ist. Wir bezeichnen $\mu = M/p$. Aus (33) folgt für eine Geodäte der Frequenz l

$$(l+1)\pi\sqrt{1-6\mu+2\mu\varepsilon} = 2lK(\frac{2\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{1-6\mu+2\mu\varepsilon}}), \tag{46}$$

oder wegen (33)

$$\varphi_{pd} = \frac{l+1}{l} 2\pi. \tag{47}$$

Das vollständige elliptische Integral ist stets $K(m) \geq \pi/2$:

$$\mu \leq \frac{2l+1}{(l+1)^2 2(3+\varepsilon)} \tag{48}$$

Es sei bemerkt, daß im Grenzfall $\varepsilon \to +0$, wenn das Orbit der Geodäte mit der Frequenz l ein Kreis ist, gilt für $\mu = M/p = M/r$

$$\mu = \frac{2l+1}{6(l+1)^2}. \tag{49}$$

Da das Orbit eine geschlossene Kurve ist, hat die das Orbit bestimmende Funktion $r = r(\varphi)$ Periodizitäten. Diese gilt es zu bestimmen. Der Einfachheit halber bezeichnen wir $2/\sqrt{1-6\mu+2\mu\varepsilon}$ mit a:

$$a = \frac{2}{\sqrt{1-6\mu+2\mu\varepsilon}}. \tag{50}$$

Für diesen Kreisfall ergibt sich

$$1 - E^2 = \frac{(3l^2+2l+1)(2l+1)}{9(2l^2+2l+1)(l+1)^2} = O(\frac{1}{l}) \; f\ddot{u}r \; l \to +\infty \tag{51}$$

und

$$\frac{L^2}{M^2} = \frac{12(l+1)^4}{(2l+1)(2l^2+2l+1)} = O(l) \; f\ddot{u}r \; l \to +\infty. \tag{52}$$

Es sei $F(\alpha; m)$ das elliptische Integral aus (31). Unter Berücksichtigung von $F(-\alpha; m) = -F(\alpha; m)$ (siehe z.B. [3]) ist

$$\begin{aligned} \varphi(2\pi - \chi) &= aF(\frac{\pi + \chi - 2\pi}{2}; m) \\ &= aF(-\frac{\pi - \chi}{2}; m) \\ &= -aF(\frac{\pi - \chi}{2}; m) \\ &= -\varphi(\chi). \end{aligned} \tag{53}$$

Da $\cos\chi = \cos(2\pi - \chi)$ folgt hieraus die Symmetrie von $r(\varphi) = r(-\varphi)$

$$\begin{aligned} r(-\varphi) &= r(-\varphi(\chi)) \\ &= r(\varphi(2\pi - \chi)) \\ &= \frac{p}{1 + \cos(2\pi - \chi)} \\ &= \frac{p}{1 + \cos\chi} \\ &= r(\varphi(\chi)) \\ &= r(\varphi). \end{aligned} \tag{54}$$

Aus (33) folgt für Geodäten der Frequenz l

$$K(m) = \frac{1}{2a}\varphi_{pd} = \frac{l+1}{al}\pi. \tag{55}$$

Einfache Umstellungen und die Positivität von $\mu = M/p$ ergeben

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(l+1)^2\pi^2 - 4l^2K^2(m)}{2(3-\varepsilon)(l+1)^2\pi^2} \\ K(m) &\leq (1 + \frac{1}{l})\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{56}$$

Der Cosinus Amplitudinis hat nachfolgende Periodizitäten (siehe z.B. [3])

$$\begin{aligned} cn(\alpha \pm jK(m); m) &= (-1)^j cn(\alpha; m) \\ cn(-\alpha; m) &= -cn(\alpha; m) \end{aligned} \tag{57}$$

und für das elliptische Integral $F(\alpha; m)$ gilt (siehe [3])

$$F(\alpha \pm n\pi; m) = F(\alpha; m) \pm 2nK(m), \ n = 0, 1, 2, ... \tag{58}$$

Aus (36) folgt dann

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= \frac{p}{1 + \varepsilon - 2\varepsilon cn^2(\frac{\varphi}{a}; m)} \\ &= \frac{p}{1 + \varepsilon - 2\varepsilon((-1)^j cn(\frac{\varphi}{a}; m))^2} \\ &= \frac{p}{1 + \varepsilon - 2\varepsilon cn^2(\frac{\varphi}{a} \pm jK(m); m)} \\ &= r(\varphi \pm jaK(m)) \\ &= r(\varphi \pm j\frac{l+1}{l}\pi). \end{aligned} \tag{59}$$

Es sei

$$\gamma = \{(t(\varphi), r(\varphi), \varphi, \frac{\pi}{2}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{+} \times_r S^2\} \tag{60}$$

ein Geodäte der Frequenz l. Wegen (59) ist dann

$$\gamma_j = \{(t(\varphi), r(\varphi + j\frac{l+1}{2l}2\pi), \varphi, \frac{\pi}{2})\},\ j = 1, 2, .., 2l \tag{61}$$

ebenfalls eine Geodäte der Frequenz l mit der gleichen geometrischen Figur als Orbit wie γ. Damit ist nachfolgender Satz bewiesen:

Satz 7 (Geodätenschale) *Es sei γ eine Geodäte der Frequenz $l \in \mathbf{N}$. Dann gibt es $2l$ verschiedene Geodäten der Frequenz l mit geometrisch identischem Orbit.*
Diese $2l$ Geodäten der Frequenz l mit geometrisch gleichem Orbit heißt Geodätenschale der Frequenz l oder einfach Geodätenschale.

□

Nicht jede Frequenz einer Geodäte ist sinnvoll. Die Aussage (52) kann wie folgt interpretiert werden. Asymptotisch verhält sich die Frequenz der Geodäte l wie eine Quadratzahl. Und (51) wie: die Energiedifferenz zwischen Unendlich ($E^2 \to 1\ f\ddot{u}r\ l \to +\infty$) und der Geodäte mit der Frequenz l verhält sich wie $1/l$. Aus der Physik ist bekannt, daß diese Differenz wie $1/n^2$ verhält, wobei n die Schalennummer ist. Beide Betrachtungen führen zu nur $l = n^2$, $n = 1, 2, ...$ ist sinnvoll.
Einige Bemerkungen zur Geodäten-Energie der Schalen. Es sei γ eine Geodäte n-ten Schale, d.h. eine Geodäte der Frequenz n^2. Wir betrachten den Grenzfall $\varepsilon \to +0$, d.h. die (Asymptoten der) Geodäten sind Kreise. Wegen der Frequenz n^2 gilt dann für den Radius des Orbits ($p \to r_c$) und die Energie E^2 der Geodäte

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{(n^2+1)^2}{2n^2+1} 6M, \\ 1 - E_n^2 &= \end{aligned} \tag{62}$$

Für die Energiedifferenz zwischen Geodäten der n-ten und der $(n-1)$-ten ergibt sich dann

$$E_{n-1}^2 - E_n^2 = \tag{63}$$

Diese Geodätenenergiedifferenz ist am gröSSten beim Übergang von der 2-ten Schale zur 1-ten und wird mit zunehmendem n immer kleiner.
Der asymptotische Wert für $\varepsilon \to +0$ der Energie E^2 einer Geodäte der Frequenz n^2 hängt nicht von M ab, nur der Abstand zum Zentrum hängt von M ab.

5 Das Atommodell

Da das Atom aus dem Atomkern und Elektronen besteht, können wir das Modell der Schwarzschild-Raumzeit zur Beschreibung des Atoms anwenden. Die Geodäten der Elektronen müssen natürlich einen gebundenen Orbit haben (das Atom ist endlich). Gemäß Satz4 gibt es im Raumteil der Schwarzschild-Raumzeit eine Ebene durch den Koordinatenursprung (Atomkern) in der sämtliche Orbits der Elektronen-Geodäten liegen. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß sämtliche Elektronen-Geodäten in der Äquatorebene liegen. Wie jede Geodäte mit gebundenem Orbit haben auch die Elektronen-Geodäten die Periheldrehung. Aufgrund der Periheldrehung kann der Orbit entweder unendlich lang sein oder eine geschlossene ebene Kurve sein. Wenn der Orbit unendlich wäre, wären (mit dem Fortschreiten der Eigenzeit) sich verändernde Eigenschaften der Atome zu erwarten. Deshalb nehmen wir dem **Prinzip der Konstanz** folgend an, daß die Elektronen-Geodäten der Frequenz l sind. Das bedeutet es gibt eine natürliche Zahl $l \geq 1$ derart, daß $l\delta = 2\pi$ ist, wobei δ die Periheldrehung der Elektronen-Geodäte ist. Gegeben sei eine Elektronen-Geodäte der Frequenz l. Dann gilt (siehe (46)) mit p, ε, μ wie oben

$$(l+1)\pi\sqrt{1-6\mu+2\mu\varepsilon} = 2lK(\frac{2\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{1-6\mu+2\mu\varepsilon}}) \qquad (64)$$

Dann gibt es gemäß Satz 7 $2l$ Geodäten in der Geodätenschale, d.h. mit der gleichen geometrischen Figur als Orbit. Wie am Ende der vorigen Sektion bemerkt ist es sinnvoll anzunehmen, daß $l = n^2,\ n = 1, 2, 3, ...$ Das bedeutet in der n-ten Elektronenschale befinden sich maximal $2n^2$ Geodäten (Elektronen). Dabei kann man annehmen, daß ε unendlich klein ist, d.h. die Orbits sind asymptotisch Kreise.
Es sei bemerkt, das für unser Sonnensystem als Schwarzschild-Raumzeit die Planeten keine solche Geodäten mit der Frequenzeigenschaft sind..
Das führt zu folgendem relativistischen Atommodell.
Definition (Atom). Ein Atom ist eine Schwarzschild-Raumzeit mit dem Metrik-Parameter M nachfolgender Art. Das Zentrum der Schwarzschild-Raumzeit heißt Atomkern mit der Masse M. In dieser Schwarzschild-Raumzeit werden nur Geodäten der Frequenzen $l = n^2, n = 1, 2, ...$ betrachtet. Dabei bilden die $2n^2$ Geodäten der Frequenz n^2 eine Elektronenschale. Die Gesamtzahl der Geodäten (Elektronen) ist durch die Ladung des Kern begrenzt. Die Geodätenschalen unterliegen nachfolgendem Bildungsgesetz: 1. Die Elektronenschale der Frequenz n^2 - beginnend mit der Schale der Frequenz $n = 1$ - wird zunächst bis zur ersten charakteristischen Zahl $2 = 2 * 1^2$ (erstes stabiles

Energienineau) gefüllt.
2. Dann wird, wenn eine innere Elektronenschale der Frequenz $(n-1)^2$ vorhanden ist, wird diese maximal gefüllt (nach der ersten äußeren Energiestabilität wird die vollständige innere Energie aufgebaut).
3. die äußere Schale der Frequenz n^2 wird dann bis zur zweiten charakteristischen Zahl $8 = 2 * 2^2$ gefüllt (es ist ein zweites vollständiges stabiles Energieniveau erreicht).
4. Im nächsten Schritt wird eine neue äußere Schale mit der Frequenz $(n+1)^2$ gebildet (es wird eine neue Energiestufe eröffnet).
5. es beginnt wieder mit 1.
Die maximale Geodätenzahl wird ladungstechnisch bestimmt.
□
Die Charakteristischen Zahlen $2n^2$, $n = 1, 2, ...$ sind die 'Belegungszahlen' der Geodätenschalen. Unter 'Belegungszahlen' ist die Anzahl der Geodäten der Frequenz n^2 zu verstehen, die als Orbit die gleiche geometrische Figur haben. Die 'Belegungszahlen' 2 und 8 der ersten beiden Schalen sind dabei von besonderer Bedeutung. Betrachtet man die geometrische Figur des Orbits einer Schale als Bahnkurve der Elektronen, so sind auf der ersten Schale (Frequenz = 1) maximal zwei Elektronen in entgegengesetzter Lage platziert. Für die zweite Schale haben wir die Frequenz 4, die Orbit-Figur hat dann 4 Perihels und 4 Apohels. Auf dieser Bahn sind also maximal 8 Elektronen platziert. Jede Schale hat also neben ihrem maximalen Energie-Level $2n^2E_n^2$ zwei stabile Unter-Level $2 * 1^2E_n^2 = 2E_n^2$ und $2 * 2^2E_n^2 = 8E_n^2$. Hierbei ist E_n die Energie einer Geodäte der n-ten Elektronenschale. Es sei noch bemerkt, daß die erste Elektronenschale $n = 1$ die einzigste Geodätenschale ist, deren Geodäten einem mittleren Impuls L haben, $12M^2 < L^2 < 16M^2$. Die zweite Elektronenschale $n = 2$ ist die Geodätenschale deren Geodäten den kleinsten Impuls mit $L^2 > 16M^2$ haben. Deshalb haben diese beiden Energieniveaus eine besondere Bedeutung und begründen unser Bildungsgesetz. Durch das angenommene Bildungsgesetz hat die äußerste Elektronen-Schale immer maximal 8 Geodäten (Elektronen).
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit könnte man zusätzlich annehmen, daß nur Geodäten der Frequenz l deren Orbits Kreise sind, betrachtet werden. Die Periheldrehung und die Periodizität der Radiusfunktion des Orbits sind dann als Grenzwerte für $\varepsilon \to +0$ zu betrachten.

6 Zusammenfassung

Das Modell der Schwarzschild-Raumzeit ist immer anwendbar, wenn ein ausgezeichnetes Zentrum im betrachteten System vorhanden ist. Das Zentrum sollte in bestimmter Hinsicht gegenüber der anderen Bestandteile dominierend sein. Immer wenn es darum geht kräftefrei Bewegungen in diesem System zu untersuchen, steht die Aufgabe der Beschreibung der Geodäten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Das ist Gegenstand des vorliegenden Artikels.
Wendet man das Modell der Schwarzschild-Raumzeit z.B. auf unser Sonnensystem an, so ist dialektisch zu berücksichtigen, daß sich unser Sonnensystem in steter Veränderung befindet. Das kommt dadurch zum Ausdruck, daß die Geodäten des Sonnensystems (d.h. die Planeten) - wenn auch gebunden (nie in der Sonne enden und nie das Sonnensystem verlassen) - unendlich lang sind. Geometrisch würde das bedeuten, daß die Periheldrehung kein ganzzahliger Teiler von 2π ist. Die tatsächliche bekannten Meßwerte der Periheldrehung der Planeten bestätigen diese Annahme. Zur genaueren Beschreibung des Sonnensystems als Schwarzschild-Raumzeit müßte man also die Gruppe solcher unendlichen, nicht geschlossenen Geodäten näher untersuchen.
Hier wenden wir das Schwarzschil-Raumzeit-Modell auf das Atom an. Im Unterschied zum Sonnensystem zeichnet sich das Atom durch eine gewisse Konstanz seiner Eigenschaften aus.Deshalb ist in diesem Fall anzunehmen, die Orbits der Geodäten sind geschlossene Kurven von endlicher Länge. Das führt zum Begriff der Geodäten der Frequenz l. Dieser Begriff ist dem Begriff der stehenden Welle sehr nah. Das Orbit kann man sich als eine elliptische Bahn vorstellen deren Hauptachse beim Zeichnen um die Periheldrehung um einen Focus gedreht wird und erst nach l Umdrehungen genau im Startpunkt endet.
Aus Ladungsgründen weiß man, daß ein Atom sehr viele Elektronen (Geodäten) haben kann aber gleichzeitig in seiner Ausdehnung sehr kompakt ist. Diese Kompaktheit zwingt zum sogenannten Schalenmodell. Es werden also Geodäten gesucht, deren Orbits geometrisch gleich sind obwohl sie, die Geodäten, unterschiedlich sind. Das Orbit als Elektronenbahn betrachtet bedeutet dies unterschiedliche Startpunkte. Es stellt sich heraus, daß es $2l$ unterschiedliche Geodäten der Frequenz l gibt. Das ist eine Elektronenschale.
Der Vergleich der Frequenz einer Geodäte mit ihrem Drehimpuls und ihrer Energie legt das ordnungsmäßige Verhalten ($O(n^2)$) der möglichen Frequenzen wie n^2 offen. Deshalb wird im relativistischen Atommodell angenommen es sind nur Frequenzen der Form n^2 zugelassen.
Dieser Vergleich zeigt auch, daß es nur eine Geodätenschale mit mittlerem

Drehimpuls $12M^2 < L^2 < 16M^2$ gibt und es gibt eine Schale mit dem kleinsten hohen Drehimpuls $\min\{L^2 > 16M^2\}$. Natürlich definieren diese beiden besonderen Schalen bestimmte Struktureigenschaften des Atoms.
All dies ist in unserem relativistischen Atommodell berücksichtigt. Wir betonen nochmals, im Sonnensystem als Schwarzschild-Raumzeit gelten andere Regeln, da es sich in diesem Fall um eine andere Geodätengruppe handelt.
Die Bemerkungen am Ende der Sektion 4 könnten folgend interpretiert werden. Üblicherweise geht man in der Physik davon aus, daß ein Elektron in eine weiter innen liegenden Schale springen kann und dabei wird Energie in Form von Licht frei. Das entspricht einem bestimmten Spektrum. Wenn die innere Schale voll belegt ist, kann es nicht mehr in die Schale springen. Bei n Schalen kann nur die $(n-1)$.te nicht voll belegt sein. Sind alle $(n-1)$ Schale voll belegt, kann das Elektron in keine andre Schale mehr springen. Das Elektron müßte dann eine Geodäte außerhalb einer Schale sein. Diese Geodäte soltte dann aber keine Frequenz haben, d.h. das Prinzip der Konstanz der Eigenschaften wäre gestört. Mit anderen Worten, die Atome nach einer solchen Ënergieabstrahlungßind im Kleinen veränderlich. Diese Zwischengeodäte ist natürlich von M abhängig, d.h. die Spektren der Photonen-Emission sind je Atom unterschiedlich. Da die Energiedifferenz der Schalen nicht von M abhängt, müßten alle Atome beim springen von der gleichen Schalennummer das gleiche Spektrum liefern. Mit anderen Worten, für alle Atome mit der gleichen Schalenanzahl und freien Plätzen auf der vorletzten Schale wird beim SSprung"die gleiche Energie emmitiert.
Eine andere Interpretation könnte sein. Wenn durch äußere Einwirkungen eine Geodäte (ein Elektron) verändert wird, könnten zwei neue Geodäten (d.h. zwei neue Teilchen) entstehen. Die Photonen sind wiederum eine spezielle Geodätengruppe, Geodäten im Unterraum $ds^2 = 0$. Dann wäre aber das ursprüngliche Elektron kein Elektron und die Ladungsbilanz des Atoms wäre gestört. Deshalb scheint es wahrscheinlicher, daß das Elektron Elektron bleibt (d.h. Geodäte mit gleichem L und E) und nur der SStartpunkt"der Geodäte verändert wird. Wie aus der Potentialkurve zu ersehen, endet die dann einzig mögliche Geodäte im Atomkern (Zentrum). Veränderungen im Atomkern bringen dann unterschiedliche Spektren des Lichtes zu Tage. Diese Vorgänge können nicht mehr mit dem Schwarzschild-Modell beschrieben und erklärt werden, da in diesem Modell das Zentrum als das unveränderlich bestimmende betrachtet wird.

Literaturverzeichnis

[1] **Subrahmanyan Chandrasekhar**, The mathematical theory of black holes, Oxford University Press, 1983, 1992.

[2] **Dr. sc. Petra Schopf, Dr. Siegfried Greschner**, About the Schwarzschild-Spacetime, http://www.drschopf.de/public/img/Solar%20System.pdf.

[3] **Ralf Hoppe**, Elliptische Integrale und Funktionen nach Jacobi, http://www.dfcgen.de/wpapers/elliptic.pdf.