

Ein relativistisches Molekül-Modell

Dr. sc. Petra Schopf

25. Juni 2015

In Andenken an Dr. Siegfried Greschner†

1 Einleitung

In [1] wurde mit Hilfe der Schwarzschild-Raumzeit ein Atommodell entwickelt. Im Atom sind weit über 99% der Energie im Atomkern konzentriert und dieser wird von Elektronen eingebettet. Deshalb ist die Anwendung des Modells Schwarzschild-Raumzeit berechtigt. Das Besondere des in [1] entwickelten relativistischen Atommodells ist die Bestimmung spezieller Geodäten-Gruppen - den Elektronen-Geodäten - als für Elektronen im Atom zulässig. Der Modell-Raum für die Bindung zwischen Atomen kann keine Schwarzschild-Raumzeit sein. In einem Molekül gibt es kein eindeutig bestimmtes Energiezentrum. Andererseits muß aber die Schwarzschild-Raumzeit Teil dieses Modells sein, da ja die Bestandteile - Atome - als Schwarzschild-Raumzeiten anzusehen sind. Wir entwickeln hier ein entsprechendes Modell, die Schwarzschild-Überlagerung. In diesem Modell wird die Atombindung beschrieben und erste Eigenschaften werden abgeleitet.

Für die Modellbildung sind spezielle genauere Untersuchungen der Schwarzschild-Metrik notwendig, die in der Sektion 2 durchgeführt werden. Wenn in [1] die Eigenschaft der Periheldrehung der Geodäten die grundlegende Basis für die Modellentwicklung waren, sind es hier die Orbitalebene. Die Orbitalebene ist eine Ebene, in der sich sämtliche Orbits der Elektronen-Geodäten befinden. Auch die Orbitalebene ist eine Eigenschaft der Atome. Aus diesen Eigenschaften leiten sich auch die relativ einfachen geometrischen Molekül-Strukturen ab.

2 Begriffliche Voraussetzungen

Zunächst eine Reihe von Begriffen aus der Differentialtopologie.

Definition (Mannigfaltigkeit). Eine topologische Menge heißt n-dimensionale k-fach differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt $x_i \in M$ ein Umgebung $U_i \subset M$ und eine Abbildung $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ derart gibt, dass

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : V_i \cap V_j \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

k-fach differenzierbar ist. Die Abbildung $V_i \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, die in Koordinaten darstellbar ist:

$$\varphi_i(x) = (\varphi_i^1(x), \dots, \varphi_i^n(x)), x \in M \quad (2)$$

Deshalb wird φ_i Koordinatensystem genannt und $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ Koordinatentransformation.

□

Im Weiteren werden wir, ohne weitere Hinweise, immer glatte Mannigfaltigkeiten, d.h. unendlich oft stetig differenzierbar, voraussetzen.

Definition (Vektorraumbündel). Eine (glatte) Mannigfaltigkeit M heißt Vektorraumbündel (über die (glatte) Mannigfaltigkeit B), wenn eine Projektion $\pi : M \rightarrow B$ derart existiert, daß jede Faser $M_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in B$ ein linearer Vektorraum endlicher Dimension ist.

Zu jedem $p \in B$ gibt es eine offene Umgebung U von p in B , einen reellen Vektorraum F endlicher Dimension und einen Diffeomorphismus (bijektive Abbildung, die selbst und ihre Umkehrabbildung stetig differenzierbar sind)

$$\phi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

derart, daß $\pi(\phi(y, v)) = y$ für beliebiges $y \in U$ und $v \in F$ und daß für jedes $y \in U$ die partielle Abbildung $\phi(y, \cdot)$ eine \mathbb{R} -lineare Bijektion des Vektorraumes F auf den Vektorraum M_p ist. Diese Eigenschaft bedeutet, daß das Vektorraumbündel lokal trivial $U \times F$ ist.

Das Vektorraumbündel heißt glatt, wenn π glatt ist.

□

Häufig wird das Vektorraumbündel auch mit dem Tripel (B, P, π) bezeichnet. Manchmal wird auch die Abbildung $\pi : B \rightarrow P$ als Vektorraumbündel bezeichnet.

Definition (n-blättrige Überlagerung). Das Faserbündel (M, X, π) ist eine n-blättrige Überlagerung der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X , wenn M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und π eine surjektive Abbildung der Klasse C^∞ ist, für welche die folgende Bedingung gilt:

Zu jedem $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x in X derart, daß sich $\pi^{-1}(U)$ als Vereinigung einer endlichen Folge (V_j) , $j = 1, 2, \dots, n$ von paarweise disjunkten offenen Teilmengen von M darstellen läßt, für welche die Einschränkung $\pi_j : V_j \rightarrow U$ von π auf jedes der V_j ein Diffeomorphismus von V_j auf U ist.

□

Definition (Schnitt). Es sei (M, B, π) ein Vektorraumbündel. Ein Schnitt s über $U \subseteq B$ heißt eine Abbildung $s : U \rightarrow M$ derart, daß $\pi \circ s = id$ gleich der Identität id ist.

Der Schnitt heißt glatt, wenn $s : U \rightarrow B$ glatt ist und global, wenn $U = B$.

□

Die Menge aller glatten Schnitte über $U \subseteq B$ wird mit $\Gamma(U; M)$ bezeichnet. Das **duale Vektorraumbündel** M^* ist die (disjunkte) Vereinigung über alle $p \in B$ sämtlicher Linearformen auf der Faser M_p .

Definition (Lorentz-Bündelmetrik). Es sei $\pi : M \rightarrow B$ ein Vektorraumbündel. Ein glatter Schnitt $g \in \Gamma(B; TM^* \times TM^*)$, d.h. eine Familie $(g_p)_{p \in B}$

von Bilinearformen $g_p : M_p \times M_p \rightarrow \mathbb{R}$, heißt Lorentz-Bündelmetrik auf B , wenn für alle $p \in B$, $X, Y, Z \in M_p$ und alle Funktionen $a, b \in C^\infty(B)$

$$\begin{aligned} g_p(aX + bY, Z) &= a(p)g_p(X, Z) + b(p)g_p(Y, Z) \text{ (tensoriell),} \\ g_p(X, Y) &= g_p(Y, X) \text{ (symmetrisch),} \\ g_p(X, Y) &= 0 \text{ für alle } Y \in M_p \Rightarrow X = 0 \text{ (nicht ausgeartet)} \\ \text{Signatur } \sigma(g_p) &= (-, +, +, +, \dots) \end{aligned} \tag{3}$$

□

Definition (Lorentz-Mannigfaltigkeit). Eine (glatte) Mannigfaltigkeit M heißt Lorentz-Mannigfaltigkeit, wenn in ihrem Tangentialbündel $\pi : TM \rightarrow M$ eine Lorentz-Bündelmetrik $g \in \Gamma(M, T^*M \otimes T^*M)$ gegeben ist.

Eine Lorentz-Mannigfaltigkeit wird auch mit (M, g) oder $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bezeichnet. Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das durch g in jedem Tangentialraum T_pM , $p \in M$ definierte Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = g_p(\cdot, \cdot)$.

□

Definition (Raumzeit). Eine Raumzeit ist eine 4-dimensionale, zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der Signatur $(-, +, +, +)$ derart, daß einen glatten globalen Schnitt (Vektorfeld) $x \in \Gamma(M, TM)$ gibt mit

$$\langle x(p), x(p) \rangle_p < 0 \text{ für alle } p \in M.$$

Diese Eigenschaft der Raumzeit wird auch zeitorientiert genannt.

□

Wir werden hier eine spezielle Raumzeit, die Schwarzschild-Raumzeit SRZ betrachten.

Definition (Schwarzschild-Raumzeit). Es sei M eine Raumzeit mit $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit einem (ausgezeichneten) kartesischen Koordinatensystem (t, x, y, z) . Im Raumteil \mathbb{R}^3 sei zu Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) mit dem Bezugssystem (x, y, z) übergegangen, d.h. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^+ \times_r S^2$. Diese Raumzeit heißt Schwarzschild-Raumzeit $SRZ = (SRZ, g)$, wenn die Metrik g im ausgezeichneten Koordinatensystem gleich der Schwarzschild-Metrik (M bezeichnet in der Metrik eine Konstante)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -h dt^2 + h^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \text{ wobei} \\ h &= h(r) = 1 - 2M/r \end{aligned} \tag{4}$$

ist. Physikalisch ist M die Masse des Zentrums. Das dieser Darstellung zugrunde gelegte Koordinatensystem wird auch Schwarzschild-Koordinaten genannt.

□

Das Vektorraumbündel $T\mathbb{R}^4$ ist global trivial, $T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$. Betrachtet man den metrischen Schwarzschild-Tensor in den Schwarzschild-Koordinaten (Darstellung (4)), so sieht man, daß $-h, h^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta$ die Eigenwerte des metrischen Tensors bezogen auf die Schwarzschild-Koordinaten sind.

Wir haben $c = G = 1$ gesetzt. Mit dieser Annahme spricht man von relativistischen (geometrisierten) Maßeinheiten. Wir werden durchgängig diese benutzen. Wegen $c = 1$ ist die Längeneinheit $1m$ gleichzeitig eine Zeiteinheit (d.h. eine Bewegungseinheit), nämlich die Zeit (Bewegung, Energie), die das Licht für die Strecke von $1m$ benötigt:

$$1\text{Sekunde} = 2,99792 \cdot 10^8 m. \quad (5)$$

Aus $G = 1$ (Gravitationskonstante) folgt dann aus der klassischen Maßeinheit für $G = 6,673 \cdot 10^{-27} m^3 / (kg \cdot s^2)$, daß

$$1kg = 7,425 \cdot 10^{-28} m. \quad (6)$$

In diesen Koordinaten ist die Schwarzschild-Metrik (4) bei $r = 2M$ singulär (Schwarzschildsphäre). Genau genommen, ist der \mathbb{R}^4 mit der Metrikdefinition (4) für $r \leq 2M$ keine exakte Raumzeit mehr, da sich die Signatur von $(- + + +)$ auf $(+ - + +)$ verändert. Wir betrachten hier grundsätzlich nur den Fall $r > 2M$. Bei fast allen Objekten, wo das Schwarzschild-Raumzeit-Modell sinnvoll ist, liegt die Schwarzschildsphäre innerhalb des Objektes. Es sei hier nur bemerkt, daß diese Singularität nur eine Koordinatensingularität mit nicht zu vernachlässigender physikalischer Bedeutung ist.

3 Abhängigkeit der Schwarzschild-Metrik vom Koordinatensystem

Die Schwarzschild-Metrik (4) ist in Kugelkoordinaten mit einem speziell gewähltem Bezugskoordinatensystem gegeben. Die Kugelkoordinaten beziehen sich immer auf ein kartesisches Bezugskoordinatensystem: ϑ - der Polwinkel, der Winkel des Punktvektors zur z -Achse, φ der Azimutwinkel, der Winkel der Orthogonalprojektion des Punktvektors auf die Äquatorialebene (xy -Ebene) zur positiven x -Achse. In der Darstellung (4) der Schwarzschild-Metrik sind keine gemischten Glieder enthalten. In den Kugelkoordinaten

gilt gemäß Definition

$$ds^2 = -h dt^2 + \begin{pmatrix} dr & r\vartheta & d\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix} \quad (7)$$

Zunächst stellen wir die Schwarzschild-Metrik im kartesischen Bezugssystem dar.

Zur Umrechnung in das kartesische Bezugssystem wird die Jacobi-Matrix J benötigt

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = S \operatorname{diag}(1, r, r \sin \vartheta) \text{ mit} \quad (8)$$

$$S = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

Die Koordinaten im Bezugssystem (für die Kugelkoordinaten) bezeichnen wir mit (t, x, y, z) . Mittels der Jacobi-Matrix erfolgt die Koordinatenumrechnung:

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (9)$$

Für das Linienelement gilt dann

$$ds^2 = -h dt^2 + \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} S \operatorname{diag}(h^{-1}, 1, 1) S^T \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (10)$$

Die Relation (8) hier eingesetzt ergibt (I sei die Einheitsmatrix)

$$\begin{aligned} T_3^{Schw} &= S \operatorname{diag}(h^{-1}, 1, 1) S^T \\ &= I + (h^{-1} - 1) \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi & \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi & \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi & \cos^2 \vartheta \end{pmatrix} \\ &= I + (h^{-1} - 1) S_J \end{aligned} \quad (11)$$

Den dreidimensionalen metrischen Tensor $S \operatorname{diag}(h^{-1}, 1, 1) S^T$ bezeichnen wir mit T_3^{Schw} . Im \mathbb{R}^4 mit dem kartesischen Bezugssystem hat

dann der metrische Tensor T^{Schw} der Schwarzschild-Metrik die Form

$$T^{Schw} = \begin{pmatrix} -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (h^{-1} - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & S_J & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (12)$$

In den kartesischen Koordinaten statt der Kugelkoordinaten wird T^{Schw} zu

$$T^{Schw} = \text{diag}(-h, 1, 1, 1) + \frac{h^{-1} - 1}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & xy & xz \\ 0 & xy & y^2 & yz \\ 0 & xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Die Eigenwerte $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von T^{Schw} sind die Nullstellen des Polynoms $\det(T^{Schw} - \lambda I)$:

$$\begin{aligned} \det(T^{Schw} - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} -h - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & T_3^{Schw} - \lambda I & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right| \\ &= (-h - \lambda) \left| T_3^{Schw} - \lambda I \right| \\ &= (-h - \lambda) \left| S \text{diag}(h^{-1}, 1, 1) S^T - S(\lambda I) S^T \right| \\ &= (-h - \lambda) \left| \text{diag}(h^{-1} - \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda) \right| \\ &= (-h - \lambda)(1 - \lambda)^2(h^{-1} - \lambda) \end{aligned} \quad (14)$$

Folglich hat T^{Schw} einen zweifachen Eigenwert 1, einen einfachen $-h$ und einen einfachen h^{-1} . Der metrische Tensor der Schwarzschild-Metrik hat in kartesischen Koordinaten die Eigenwerte $-h, h^{-1}, 1, 1$. Dann existierte eine Matrix $S_k \in SO(4)$ (deren Spalten die normierten Eigenvektoren sind) derart, daß

$$T^{Schw} = S_k \text{diag}(-h, h^{-1}, 1, 1) S_k^T$$

ist. Ist der metrische Tensor im kartesischen Koordinatensystem die Diagonalmatrix $\text{diag}(-h, h^{-1}, 1, 1)$, so ist es in den zugeordneten Kugelkoordinaten $(-h, h^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta)$. Das bedeutet, wenn im kartesischen Koordinatensystem der metrische Tensor die Diagonalmatrix $\text{diag}(-h, h^{-1}, 1, 1)$ ist, liegen die Orbits aller gebundener Geodäten in der Äquatorialebene. Umgekehrt, wenn alle Orbits in der Äquatorialebene liegen, dann ist (in kartesischen

Koordinaten) der metrische Tensor die Diagonalmatrix $diag(-h, h^{-1}, 1, 1)$. Tatsächlich, wenn das nicht so wäre, gebe es eine Rotation, die den metrischen Tensor in die benannte Diagonalform brächte (ein Charakteristikum der Schwarzschild-Metrik sind die Eigenwerte $-h, h^{-1}, 1, 1$). Da aber die Geodäten schon vorher äquatorial waren, muß diese Rotation die Identische sein. Mit anderen Worten es existiert ein durch Rotation aus dem Bezugskoordinatensystem gewonnenes kartesisches Koordinatensystem in dem der metrische Schwarzschild-Tensor eine Diagonalmatrix ist.

Zum Abschluss dieses Abschnittes betrachten wir noch die Transformation des metrischen Schwarzschild-Tensors bei einer räumlichen Rotation des Bezugskoordinatensystems. Da in der Schwarzschild-Raumzeit der Koordinatenursprung durch das Gravitationszentrum fixiert ist, sind nur Rotationen interessant. Die t -Koordinate ist eine allgemeine Bewegungskordinate, die ebenfalls als fixiert anzusehen ist. In der Schwarzschild-Raumzeit sind also nur Rotationen des Raumteils von Interesse. Rotationen des \mathbb{R}^3 werden mit der orthogonalen Gruppe $SO(3)$ beschrieben. Es sei $s \in SO(3)$ eine orthogonale Matrix ($s^T \cdot s = \text{Einheitsmatrix}$) mit Determinante Eins, d.h. eine Rotation des \mathbb{R}^3 . Die kartesischen Koordinaten des Bezugskoordinatensystem der Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) bezeichnen wir weiterhin mit (x, y, z) . Dann sind folgende Koordinatentransformationen zu betrachten:

$$(t, x, y, z) \mapsto (t, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = t \times (x, y, z) \cdot s \quad (15)$$

Wir gehen vom kartesischen Bezugskoordinatensystem aus. Der Weg der Transformation von den Kugelkoordinaten zum Bezugskoordinatensystem ist oben beschrieben. Im kartesischen Bezugskoordinatensystem sei das Linienelement gegeben mit (siehe (9))

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}dx^i dx^j \quad (16)$$

wobei $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ und $g_{ij} = g_{ji}$, $i \neq j$. Den metrischen Tensor bezeichnen wir kurz mit T^{Schw} und den metrischen Subtensor $(g_{ij})_{i,j=1}^3$ mit T_3^{Schw} . Da die Koeffizienten von s bezüglich des betrachteten Raumes Konstanten sind, folgt aus (10)

$$\begin{aligned} (dt, d\tilde{x}, d\tilde{y}, d\tilde{z}) &= dt \times (dx, dy, dz) \cdot s, \\ (dt, dx, dy, dz) &= dt \times (d\tilde{x}, d\tilde{y}, d\tilde{z}) \cdot s^T \end{aligned} \quad (17)$$

Damit wird das Linienelement im transformierten Koordinatensystem zu

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}dt^2 + \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} T_3^{Schw} \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix}^T \\ &= g_{00}dt^2 + \begin{pmatrix} d\tilde{x} & d\tilde{y} & d\tilde{z} \end{pmatrix} \cdot s^T T_3^{Schw} s \cdot \begin{pmatrix} d\tilde{x} & d\tilde{y} & d\tilde{z} \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (18)$$

Für den 4-dimensionalen metrischen Schwarzschild-Tensor T^{Schw} im rotierten Koordinatensystem $(t, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ gilt dann

$$T^{Schw} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & s^T T_3^{Schw} s & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (19)$$

Nun noch einige Bemerkungen zu den **Geodäten**. Insbesondere beweisen wir eine wesentliche Verstärkung der Aussage in [1]. Es sei (\mathbb{R}^4, g) eine Schwarzschild-Raumzeit und das Koordinatensystem sei derart, daß die Schwarzschild-Metrik mit (4) gegeben ist. Und γ eine beliebige Geodäte in ihr. Eine Geodäte ist eine Kurve für die die kovariante Ableitung der Tangente nach der Tangente in jedem Punkt verschwindet. Aus dieser Definition folgen (für die Schwarzschild-Raumzeit) die Bewegungsgleichungen einer Geodäte. Zu jeder Geodäte γ (außerhalb der Schwarzschild-Sphäre) existieren Konstanten E und L , sodass die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} (i) \quad & h \frac{dt}{d\tau} = E \\ (ii) \quad & r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{d\tau} = L \\ (iii) \quad & \frac{d}{d\tau} \left[r^2 \frac{d\vartheta}{d\tau} \right] = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

gelten.

Das **Orbit** $\vec{\gamma} = o_3(\gamma)$ der Geodäte γ ist die Projektion in den Raumteil der Schwarzschild-Raumzeit

$$o_3 : \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (21)$$

Im zusätzlich ausgezeichneten Koordinatensystem - das Orbit der Geodäte liegt in der Äquatorialebene $\vartheta = \pi/2$ - gilt zusätzlich die Energiegleichung

$$E^2 = \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right) h(r) \quad (22)$$

Eine Geodäte heißt **gebundene Geodäte**, wenn der Radius-Vektor des Orbits der Geodäte nach oben und unten beschränkt ist, d.h. weder in das Zentrum noch in das Unendliche entweicht. Die Elektronen-Geodäten sind spezielle gebundene Geodäten.

Wir wollen zunächst zeigen, wenn im gewählten (Bezugs-) Koordinatensystem in den entsprechenden Kugelkoordinaten der metrische Tensor die Diagonalmatrix $diag(-h, h^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta)$ ist, dann liegt das Orbit jeder gebundenen Geodäte in der Äquatorialebene. Es sei γ eine gebundene Geodäte. Es ist wohl bekannt (siehe z.B. ?? oder weiter unten Satz 1), daß es im $o_3(\mathbb{R}^4)$ eine Ebene (durch den Koordinatenursprung) gibt, in der das Orbit $\vec{\gamma}$ der Geodäte γ liegt. Diese spezielle Ebene heißt **Orbitalebene** und wird durch eine Normalenvektor $\vec{n} = (\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$ definiert:

$$\vec{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \vec{n}_x x + \vec{n}_y y + \vec{n}_z z = 0\} \quad (23)$$

Die Kugelkoordinaten dieser normierten Normale werden wie folgt bezeichnet

$$\vec{n} = (1, \theta, \phi)$$

Der Zusammenhang zu den kartesischen Bezugskordinaten wird gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{n}_x &= \sin \theta \cos \phi \\ \vec{n}_y &= \sin \theta \sin \phi \\ \vec{n}_z &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Nach Einsetzen dieser Werte in die Gleichung der Orbitalebene und Übergang zu den Kugelkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \vec{n}_x x + \vec{n}_y y + \vec{n}_z z = 0\} \\ &= \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times_r S^2 : \sin \vartheta \sin \theta \cos(\varphi - \phi) + \cos \theta \cos \vartheta = 0\} \end{aligned} \quad (25)$$

Bezüglich der Koordinatentransformationen, Kugelkoordinaten \rightarrow kartesischen Bezugskordinatensystem und (fixe) Rotationen des kartesischen Koordinatensystems, bleibt die Orbitalebene immer eine Ebene durch den Koordinatenursprung.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß die Geodäte nach der Bogenlänge τ , $d\tau^2 = -ds^2$ parametrisiert ist. Das Orbit $\vec{\gamma}$ der Geodäte γ liegt vollständig in \vec{G} und genügt somit der Orbitalebene-Gleichung

$$\sin \vartheta \sin \theta \cos(\varphi - \phi) + \cos \theta \cos \vartheta = 0, \quad (r, \vartheta, \varphi) \in \vec{\gamma}.$$

Die Differentiation nach τ und die Berücksichtigung der Orbitalebene-Gleichung (30) ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi' \sin \theta \sin \vartheta \sin(\varphi - \phi) &= \vartheta' [\cos \vartheta \sin \theta \cos(\varphi - \phi) - \cos \theta \sin \vartheta] \\ \varphi' \sin \theta \sin^2 \vartheta \sin(\varphi - \phi) &= -\vartheta' \cos \theta [\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta] \\ -(r^2 \sin^2 \vartheta \varphi') \sin \theta \sin(\varphi - \phi) &= r^2 \vartheta' \cos \theta\end{aligned}\quad (26)$$

Unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichung

$$r^2 \frac{d\vartheta}{d\tau} \cos \theta = -L \sin \theta \sin(\varphi - \phi) \quad (27)$$

Es sei erinnert, wir sind im ausgezeichneten Koordinatensystem (metrischer Tenson ist Diagonalmatrix (4)).

Es sei $s \in SO(3)$ die Rotation, die die Normale der Orbitalebene in die positive z -Achse dreht. Für s kann folgendes Element aus $SO(3)$ gewählt werden

$$s = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (28)$$

Für diese Rotation (im Bezugskordinatensystem der Kugelkoordinaten) gilt

$$\vec{n} \cdot s = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \cdot s = (0, 0, 1). \quad (29)$$

Die Orbitalebene \vec{G} wird mittels s in die Äquatorialebene $\{z = 0\}$ transformiert:

$$\vec{G} \cdot s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

Da $\vec{\gamma} \subset \vec{G}$, transformiert s das Orbit in die Äquatorialebene. Das Orbit liegt vollständig in der Orbitalebene $\vec{G} = \{(r, \vartheta, \varphi) : \tan \theta \tan \vartheta \cos(\varphi - \phi) = -1\}$. Dann gilt auch für die Tangente $\vec{\gamma}' \subset \vec{G}$

$$\left(\frac{d}{d\tau}(r \sin \vartheta \cos \varphi), \frac{d}{d\tau}(r \sin \vartheta \sin \varphi), \frac{d}{d\tau}(r \cos \vartheta) \right) \in \vec{G}. \quad (30)$$

Die Normale n der Orbitalebene \vec{G} ist $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, $\vec{n} \cdot \vec{\gamma} = 0$. Aus (30) wird dann unter Beachtung der Bewegungsgleichungen,

der Orbitalebene-Gleichung und (32)

$$\begin{aligned}
0 &= \sin \theta \cos \phi [r' \sin \vartheta \cos \varphi + r \vartheta' \cos \vartheta \cos \varphi - r \varphi' \sin \vartheta \sin \varphi] + \\
&\quad + \sin \theta \sin \phi [r' \sin \vartheta \sin \varphi + r \vartheta' \cos \vartheta \sin \varphi + r \varphi' \sin \vartheta \cos \varphi] + \\
&\quad + \cos \theta [r' \cos \vartheta - r \vartheta' \sin \vartheta] = \\
&= r' [\sin \theta \sin \vartheta (\cos \phi \cos \varphi + \sin \phi \sin \varphi) + \cos \theta \cos \vartheta] + \\
&\quad + r \vartheta' [\sin \theta \cos \vartheta (\cos \phi \cos \varphi + \sin \phi \sin \varphi) - \cos \theta \sin \vartheta] + \\
&\quad + r \varphi' \sin \theta \sin \vartheta (\sin \phi \cos \varphi - \cos \phi \sin \varphi) = \\
&= r \vartheta' [\sin \theta \cos \vartheta \cos(\phi - \varphi) - \cos \theta \sin \vartheta] + \\
&\quad + r \varphi' \sin \theta \sin \vartheta \sin(\phi - \varphi) = \\
&= -r \vartheta' [\cos^2 \vartheta \cos \theta \sin^{-1} \vartheta + \cos \theta \sin \vartheta] + \\
&\quad + r \varphi' \sin \theta \sin \vartheta \sin(\phi - \varphi) = \\
&= -r \vartheta' \cos \theta \sin^{-1} \vartheta + r \varphi' \sin \theta \sin \vartheta \sin(\phi - \varphi) \\
0 &= -r^2 \vartheta' \cos \theta + r^2 \varphi' \sin \theta \sin^2 \vartheta \sin(\phi - \varphi) = \\
&= \sin \theta \sin(\varphi - \phi) [L + r^2 \varphi' \sin^2 \vartheta] \\
0 &= L \sin \theta \sin(\varphi - \phi)
\end{aligned} \tag{31}$$

Da die letzte Gleichung aus (31) für alle ϑ und φ auf γ mit $\sin \vartheta \neq 0$ gilt, muß

$$\sin \theta = 0. \tag{32}$$

Dies bedeutet aber, daß die Orbitalebene \vec{G} die Äquatorialebene (xy -Ebene) ist. Folglich gilt

Satz 1 (Äquatorialebene). Es sei (\mathbb{R}^4, g) eine Schwarzschild-Raumzeit und das Bezugskoordinatensystem sei so gewählt, das die Schwarzschild-Metrik in den zugeordneten Kugelkoordinaten in der Form (4) gegeben ist. Dann liegen die Orbits aller gebundenen Geodäten in der Äquatorialebene (xy -Ebene).

□

Anders gesagt, ist das Koordinatensystem im \mathbb{R}^4 so ausgewählt, daß in den Kugelkoordinaten mit diesem Bezugskoordinatensystem der metrische Tensor der Schwarzschild-Metrik eine Diagonalmatrix $diag(-h, h^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta)$ ist, liegen sämtliche gebundene Geodäten in der Äquatorialebene. Betrachten wir dieses Ergebnis aus anderer Sicht. Gegeben sei eine Schwarzschild-Raumzeit (\mathbb{R}^4, g) . Fixieren wir im \mathbb{R}^4 ein kartesisches Koordinatensystem. Aus der Definition heraus existieren die Schwarzschild-Koordinaten in denen die Metrik den Ausdruck (4) annimmt. Das kartesische Bezugssystem zu den Schwarzschild-Kugelkoordinaten kann dann gegenüber dem fixierten

nur rotiert sein (der Koordinatenursprung muß identisch sein, und Achsen (euklidisch) orthogonal). In dem fixierten Koordinatensystem ist die Schwarzschild-Metrik nicht notwendig in der Diagonalf orm gegeben. Da beim Übergang von Kugelkoordinaten zum Bezugssystem und vom Bezugssystem zum rotierten Ebenen in Ebenen abgebildet werden, existiert eine Orbitalebene \vec{G} - die nicht notwendig mit der Äquatorialebene zusammenfällt - in der sämtliche Orbits gebundener Geodäten liegen. Diese Ebene habe die Normale (in Kugelkoordinaten) $\vec{n} = (1, \theta, \phi)$. Die dazugehörige Rotation s (24) bringt eine solche Koordinatentransformation, daß im rotierten Koordinatensystem der metrische Schwarzschild-Tensor die oben benannte Diagonalmatrix ist und die Orbits der gebundenen Geodäten liegen in der Äquatorialebene. Einzelheiten zu dieser Koordinatentransformation haben wir bereits weiter oben fixiert.

4 Die Schwarzschild-Überlagerung

In diesem Abschnitt definieren wir den Raum, das Modell, in dem und mit dem wir die Molekülbildung beschreiben, die Schwarzschild-Überlagerung. Dem Molekül liegt das Atom zugrunde. Ein Atom ist eine wohl definierte Geodätenstruktur einer Schwarzschild-Raumzeit mit dem Zentrum im Atomkern und einer durch den Atomkern definierten Raumkrümmung. Das zugrunde gelegte Atommodell ist in [1] entwickelt.

Der Raumteil einer Schwarzschild-Raumzeit ist das Bild der zweiten orthogonale Projektion des $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ in den \mathbb{R}^3 und die Projektion einer Geodäte in den Raumteil wird Orbit der Geodäte genannt. Die speziellen Geodäten eines Atoms werden Elektronen-Geodäten genannt. Die wichtigsten, hier vorausgesetzten, Eigenschaften der Geodäten eines Atoms sind (siehe [1])

- Das Orbit einer Elektronen-Geodäten ist eine geschlossene Kurve endlicher Länge im \mathbb{R}^3 und die Projektion des Zentrums der Schwarzschild-Raumzeit liegt im Inneren der von der Geodäte berandeten endlichen Fläche.
- Die Elektronen-Geodäten γ sind in Schalen gruppiert.
- Alle Geodäten einer Schale haben die gleiche Energie E , den gleichen Drehimpuls L und die gleiche Orientierung $sign\ dr/d\tau(0)$.

- Das Orbit $\vec{\gamma}$, d.h. die Projektion in den Raumteil, jeder Elektronen-Geodäten liegt in einer Ebene des Raumteils durch den Koordinatenursprung.
- Die Orbits sämtlicher Elektronen-Geodäten liegen in ein und derselben Ebene durch den Koordinatenursprung (siehe [2]).
- Mittels einer Rotation $s \in SO(3)$ wird erreicht, daß sämtliche Orbits der Elektronen-Geodäten in der Äquatorialebene $\vartheta \equiv \pi/2$ liegen. Dieses Element s ist bis auf den Stabilisator $H_{s, \mathbb{R}^3} \subset SO(3)$ genau bestimmt.

Gegeben sein n Atome, die je eine Schwarzschild-Raumzeit sind. Das bedeutet im \mathbb{R}^4 sind n Schwarzschild-Metriken $g^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$ gegeben. Anders gesagt es sind n Schwarzschild-Raumzeiten $(\mathbb{R}^4, g^{(j)})$ gegeben.

Definition (Schwarzschild-Überlagerung). Gegeben seien n Schwarzschild-Raumzeiten $(\mathbb{R}^4, g^{(j)})$, $j = 1, \dots, n$. Es seien Cs die disjunkte Vereinigung

$$Cs = \bigcup_{j=1}^n (\mathbb{R}^4, g^{(j)}) \quad (33)$$

und $\pi : Cs \rightarrow \mathbb{R}^4$ die surjektive Projektion

$$\pi : Cs = \bigcup (\mathbb{R}^4, g^{(j)}) \supset (\mathbb{R}^4, g^{(j)}) \ni p \mapsto p \in \mathbb{R}^4. \quad (34)$$

Die n -blättrige Überlagerung (Cs, \mathbb{R}^4, π) heißt Schwarzschild-Überlagerung, wenn die kartesischen Koordinatensysteme des \mathbb{R}^4 der einzelnen Blätter mit dem der Basis \mathbb{R}^4 identisch sind.

□

Mit $(t, r, \vartheta, \varphi)$ bezeichnen wir die dem gemeinsamen kartesischen Koordinatensystem zugeordnete Kugelkoordinaten. Im Raumteil $o_3^{(j)}(\mathbb{R}^4)$ eines jeden Blattes existiert gemäß Satz 1 eine Orbitalebene. Das bedeutet für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ existieren zwei Winkel θ_j und ϕ_j derart, daß die Orbits sämtlicher gebundener Geodäten $\vec{\gamma}^{(j)}$ der Schwarzschild-Raumzeit $(\mathbb{R}^4, g^{(j)})$ in der Orbitalebene \vec{G} liegen

$$\vec{\gamma}^{(j)} \subset \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times_r S^2 : \sin \theta_j \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_j) + \cos \theta_j \cos \vartheta = 0\} \quad (35)$$

Weiter sei

$$s^{(j)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_j \cos \phi_j & -\sin \phi_j & \sin \theta_j \cos \phi_j \\ \cos \theta_j \sin \phi_j & \cos \phi_j & \sin \theta_j \sin \phi_j \\ -\sin \theta_j & 0 & \cos \theta_j \end{pmatrix}. \quad (36)$$

ein Element aus $s^{(j)} \in SO(3)$. Diese Rotation des Raumeils von $(\mathbb{R}^4, g^{(j)})$ transformiert die Orbitalebene des j -ten Blattes in die gemeinsame Äquatorialebene. Oben hatten wir gesehen, wenn alle Orbits in der Äquatorialebene liegen, dann ist der metrische Schwarzschild-Tensor die Diagonalmatrix $diag(-h, h^{-1}, 1, 1)$. Da $g^{(j)}$ eine Schwarzschild-Metrik ist, hat der metrische Tensor $(g^{(j)})$ die Form

$$(g^{(j)}) = \begin{pmatrix} -h_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}^{(j)} & g_{12}^{(j)} & g_{13}^{(j)} \\ 0 & g_{21}^{(j)} & g_{22}^{(j)} & g_{23}^{(j)} \\ 0 & g_{31}^{(j)} & g_{32}^{(j)} & g_{33}^{(j)} \end{pmatrix}$$

und unter Berücksichtigung der Rotation $s^{(j)}$

$$\begin{aligned} (g^{(j)}) &= \begin{pmatrix} -h_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^{(j)} diag(h^{-1}, 1, 1) & (s^{(j)})^T \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -h_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + (h_j^{-1} - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta_j \cos^2 \phi_j & \cos^2 \theta_j \sin \phi_j \cos \phi_j & -\sin \theta_j \cos \theta_j \cos \phi_j \\ 0 & \cos^2 \theta_j \sin \phi_j \cos \phi_j & \cos^2 \theta_j \sin^2 \phi_j & -\sin \theta_j \cos \theta_j \sin \phi_j \\ 0 & -\sin \theta_j \cos \theta_j \cos \phi_j & -\sin \theta_j \cos \theta_j \sin \phi_j & \sin^2 \theta_j \end{pmatrix} \\ &= diag(-h_j, 1, 1, 1) + (h_j^{-1} - 1)(v_{ij}) \end{aligned} \tag{37}$$

Übrigens dies ist auch die allgemeine Form einer Schwarzschild-Metrik in einem kartesischen Koordinatensystem.

Mit Hilfe der Schwarzschild-Überlagerung soll das Molekül beschrieben werden. Dabei sollen die einzelnen Blätter die beteiligten Atome repräsentieren. Die Atomkerne - die Koordinatenursprünge der \mathbb{R}^4 - haben alle die gleiche Position, d.h. es ist immer $\pi^{-1}(0)$. Im Molekül ist das natürlich nicht so. Zumindest im Raumeil von $\pi(Cs)$ haben die Atomkerne unterschiedliche Position. Betrachten wir der Einfachheit halber nur zwei Atome, d.h. eine zweiblättrige Schwarzschild-Überlagerung Cs . Im Molekülverband haben die beiden Atomkerne im $o_3 \circ \pi(Cs)$ die Positionen $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$. Die Atomstruktur - Atomkern plus Elektronen-Geodäten - befindet sich jeweils in der

jeweiligen Orbitalebene \vec{G}_j . Verschiebt man nun diese Atomstrukturen (Orbitalebene) parallel in den jeweiligen Punkt $p^{(j)}$ ergeben sich im Raumteil zwei Ebenen in denen das jeweilige Atom wirkt. Sollen diese beiden Atome in irgendeiner Art und Weise eine Verbindung eingehen, so müssen sich diese Ebenen zumindest schneiden. In der Schnittmenge existiert dann mindest ein gemeinsamer Punkt beider Ebenen. Wäre das Ausgangskordinatensystem parallel mit dem Koordinatenursprung in diesem gemeinsamen Punkt befänden sich die beiden Atomstrukturen wieder in den Orbitalebene durch den Koordinatenursprung. Somit kann angenommen werden in einem Molekülverband sind die Atomkerne immer auf der Orbitalebene des eigenen Atoms. Genauer untersuchen wir dies in der folgenden Sektion.

5 Chemische Bindung

Die Atome eines Moleküls interagieren miteinander. Dieser Interaktion widmen wir nun unsere Aufmerksamkeit. Interaktion kann nur bedeuten, daß die Geodäten der äußeren Elektronen-Schale in eine gewisse Interaktion treten. Wenn auch Geodäten weiter innerer Schalen beteiligt wären, könnte es Kollisionen mit denen der weiter äußeren geben.

Der besseren Übersichtlichkeit wegen betrachten wir zunächst den Fall von zwei Atomen im Molekül, d.h. eine zweiblättrige Schwarzschild-Überlagerung $Cs = (\mathbb{R}^4, g^{(1)}) \cup (\mathbb{R}^4, g^{(2)})$. Es seien γ_1 und γ_2 je eine Geodäte der jeweils äußeren Elektronen-Schale, die im \mathbb{R}^4 nach der Eigenzeit parametrisiert gegeben sind:

$$\gamma_j = \{(r(\tau), \vartheta(\tau), \varphi(\tau)) : \tau \in \mathbb{R}\}. \quad (38)$$

Mir haben nicht gefordert, daß die Geodäten γ_1 und γ_2 auch tatsächlich Elektronen im Atommodell sind, es können auch 'unbelegte' Geodäten der jeweils äußeren Schale sein.

In einem Molekül können die einzelnen Blätter der Schwarzschild-Überlagerung (Cs, \mathbb{R}^4, π) nicht unabhängig voneinander sein, es existiert eine Interaktionen zwischen den Blättern. Diese Interaktion kann sich nur auf die Elektronen-Geodäten des jeweiligen Blattes beziehen. Für eine Geodäte verschwindet die kovariante Ableitung der Tangente entlang der Tangente und im Molekül muß eine Art vereinigter 'Geodäte' entstehen. Deshalb müssen im Interaktionspunkt mindest die Tangentialräume zusammenfallen. Es ist offensichtlich, daß nur Elektronen-Geodäten der äußeren Schale interagieren können, da es sonst zu Kollisionen mit anderen Geodäten kommen könnte. Außerdem können nicht beide an der Interaktion beteiligte Elektronen-Geodäten tatsäch-

lich Elektronen der beteiligten Atome sein, da ja auch die neue gemeinsame 'Geodäte' nur ein Elektron sein kann. Physikalisch gesehen passiert die Bindung über Elektronen die um zwei Atomkerne kreisen, eine Art 'Acht'. In der Schwarzschild-Überlagerung sind die Zentren (Atomkerne) der Blätter alle im Koordinatenursprung gelegen. In einem Molekül sind die Zentren räumlich gegeneinander positioniert. Deshalb ist in der Schwarzschild-Überlagerung (Cs, \mathbb{R}^4, π) die (identische) Projektion π um eine Parallelverschiebung zu erweitern. Parallelverschiebungen ändern die Tangentialräume nicht. Die Positionierung der beiden Atomkerne im Molekülverband ist durch zwei Punkte $\vec{p}^{(1)}$ und $\vec{p}^{(2)}$ im Raumteil $o_3 \circ \pi(Cs)$ gegeben. Mit $P^{(j)}$ bezeichnen wir die Parallelverschiebung

$$\mathbb{R}^4 \ni (t, \vec{x}) \mapsto (t, \vec{x} - \vec{p}^{(j)}) \in \mathbb{R}^4 \quad (39)$$

Dann wird mittels $P^{(j)} \circ \pi$ das j -te Blatt der Schwarzschildüberlagerung Cs mit der entsprechend transformierten Metrik $g^{(j)}$ die Schwarzschild-Raumzeit des j -ten Atoms. Für beide Atome haben wir somit das gleiche Koordinatensystem, die Tangentialräume wurden nicht verändert und die disjunkte Vereinigung beider parallel verschobener Blätter ist wieder eine Schwarzschild-Überlagerung. Deshalb ist es hinlänglich im Molekülmodell Schwarzschild-Überlagerungen zu betrachten.

Gegeben sei eine zweiblättrige Schwarzschild-Überlagerung (Cs, \mathbb{R}^4, π) , wobei $Cs = (\mathbb{R}^4, g^{(1)}) \cup (\mathbb{R}^4, g^{(2)})$. Wir erinnern, in allen drei \mathbb{R}^4 sind identische Koordinatensysteme gegeben. In jedem Blatt ist eine Atomstruktur gegeben, d.h. eine Schalenfamilie von Elektronen-Geodäten. Es seien $\gamma^{(1)}$ und $\gamma^{(2)}$ zwei Elektronen-Geodäten der jeweils äußeren Schale. Dabei sei eine Geodäte eine tatsächliche (belegte) Elektronen-Geodäte und die zweite eine potentielle nicht belegte Elektronen-Geodäte der äußeren Schale. Interaktion der beiden Geodäten bedeutet also Existenz je eines Punktes $a^{(j)} \in \gamma^{(j)}$ derart, daß die Tangentialräume an die entsprechende Geodäte in diesen Punkten zusammenfallen. Wir nennen den Punkt $a^{(j)}$ **Andock-Punkt** der Geodäte $\gamma^{(j)}$. Im Raumteil bedeutet dies geometrisch, daß nach der Parallelverschiebung der beiden Orbits innerhalb der jeweiligen Orbitalebene so, daß der Andock-Punkt im Koordinatenursprung liegt, sich die beiden Orbits im Ursprung berühren. Die Projektion des gemeinsamen Tangentialraums in den Raumteil ist dann die Schnittgerade der beiden Orbitalräume. Man kann sich das Bild im Raumteil vorstellen als ein Dach, der Andock-Punkt liegt auf dem Dachfirst und das Dachfirst selbst ist die Tangente an beide Orbits.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß das erste Atom in der Äquatorialebene liegt. Dann ist das Linienelement der ersten

Schwarzschild-Metrik $g^{(1)}$

$$ds^2 = -h_1(r) dt^2 + h_1(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (40)$$

und die Orbitalebene $\vec{G}^{(1)}$

$$\vec{G}^{(1)} = \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times_r S^2 : \vartheta = \frac{\pi}{2}\}. \quad (41)$$

Für das zweite Atom existieren dann zwei Winkel $\theta \in [0, \pi)$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ derart, daß die Orbitalebene des zweiten Atoms gegeben ist mit

$$\vec{G}^{(2)} = \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times_r S^2 : \sin \theta \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi) + \cos \theta \cos \vartheta = 0\}, \quad (42)$$

oder mit $n_x = \sin \theta \cos \phi$, $n_y = \sin \theta \sin \phi$ und $n_z = \cos \theta$ in den zugeordneten kartesischen Koordinaten

$$\vec{G}^{(2)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xn_x + yn_y + zn_z = 0\} \quad (43)$$

und der metrische Tensor des zweiten Atoms hat im kartesischen Bezugssystem die Form (38)

$$(g^{(2)}) = \begin{pmatrix} -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s \operatorname{diag}(h_2^{-1}, 1, 1) s^T & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad (44)$$

$$s = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die beiden Geodäten nehmen wir als nach der Eigenzeit τ parametrisiert an

$$\gamma^{(j)} = \{(t^{(j)}(\tau), x^{(j)}(\tau), y^{(j)}(\tau), z^{(j)}(\tau))\}. \quad (45)$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die jeweiligen Andock-Punkte $a^{(j)} \in \gamma^{(j)}$ dem Wert $\tau = 0$ entsprechen. Die Tangentialgeraden werden durch die Tangentialvektoren $(\gamma^{(j)})'$ aufgespannt

$$(\gamma^{(j)})' = \frac{dt^{(j)}}{d\tau}(0) \partial_t + \frac{dx^{(j)}}{d\tau}(0) \partial_x + \frac{dy^{(j)}}{d\tau}(0) \partial_y + \frac{dz^{(j)}}{d\tau}(0) \partial_z. \quad (46)$$

Das Orbit jeder Geodäten liegt vollständig in der Orbitalebene. Folglich ist $o_3 \cdot (\gamma^{(j)})'$ im Durchschnitt beider Orbitalebenen

$$o_3 \cdot (\gamma^{(j)})' \subset D = \left\{ \frac{dx^{(j)}}{d\tau} n_x + \frac{dy^{(j)}}{d\tau} n_y = 0, \frac{dz^{(j)}}{d\tau} = 0 \right\}. \quad (47)$$

In den Kugelkoordinaten hat die Durchschnittsmenge die Darstellung

$$D = \{ \sin \theta \cos(\varphi - \phi) [r' \sin \vartheta + r \vartheta' \cos \vartheta] = r \varphi' \sin \vartheta \sin \theta \sin(\varphi - \phi), \quad (48)$$

$$r' \cos \vartheta = r \vartheta' \sin \vartheta \}$$

Betrachten wir zunächst das erste Atom etwas genauer. Die Tangente ist dann unter Beachtung der Bewegungsgleichungen (in die die Metrik eingeht)

$$\left(\gamma^{(1)} \right)' = \frac{E_1}{h_1(r(0))} \partial_t + \sqrt{E_1^2 - V_1(r^{(1)}(0))} \partial_r + L_1 \partial_\varphi, \quad (49)$$

wobei E_1 die Energie, L_1 der Drehimpuls und $V_1(r)$ die Potentialfunktion der Geodäte $\gamma^{(1)}$ sind. Gleichzeitig erfüllt die Tangente im Raumteil (47) / (48) (unter Beachtung von $\vartheta \equiv \pi/2$)

$$0 = \frac{dx^{(1)}}{d\tau} n_x + \frac{dy^{(1)}}{d\tau} n_y$$

$$= \frac{dr^{(1)}}{d\tau} \sin \theta \cos(\varphi - \phi) - \frac{d\varphi^{(1)}}{d\tau} r \sin \theta \sin(\varphi - \phi)$$

$$= \sin \theta \left[\sqrt{E_1^2 - V_1(r^{(1)}(0))} \cos(\varphi(0) - \phi) - L_1 \left(r^{(1)} \right)^{-1} \sin(\varphi(0) - \phi) \right]. \quad (50)$$

Das bedeutet, damit im Raumteil die Tangente an $\gamma^{(1)}$ im Andock-Punkt $a^{(1)}$ im Durchschnitt der beiden Orbitalebene liegt, muß entweder

$$\theta = 0$$

oder im Andock-Punkt

$$r^{(1)} \sqrt{E_1^2 - V_1} \cos(\varphi - \phi) = L_1 \sin(\varphi - \phi).$$

Wenn $\theta = 0$, dann ist auch die Orbitalebene des zweiten Atoms mit der des ersten identisch.

Nun zum zweiten Atom.

$$\left(\gamma^{(2)} \right)' = \frac{dt^{(2)}}{d\tau}(0) \partial_t + \frac{dx^{(2)}}{d\tau}(0) \partial_x + \frac{dy^{(2)}}{d\tau}(0) \partial_y + \frac{dz^{(2)}}{d\tau}(0) \partial_z. \quad (51)$$

Die Orbitalebene $\vec{G}^{(2)}$ hat die Normale $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (1, \theta, \phi)$. Wir führen die Koordinatentransformation

$$(t, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (t, (x, y, z) \cdot s) \quad (52)$$

aus. Hierbei ist $s \in SO(3)$ die Matrix (54). In dem neuen kartesischen Koordinatensystem ist der metrische Tensor des zweiten Atoms die Diagonalmatrix

diag $(-h_2, h_2^{-1}, 1, 1)$ und in dazugehörigen Kugelkoordinaten $(t, r, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$ hat die Metrik die ausgezeichnete Form (4) und die Orbitalebene ist die Äquatorialebene im Koordinatensystem $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Die Tangente in Kugelkoordinaten des Bezugssystems $(t, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ hat die Form

$$\left(\gamma^{(2)}\right)' = \frac{E_2}{h_2} \partial_t + \sqrt{E_2^2 - V_2} \partial_r + L_2 \partial_{\tilde{\varphi}}, \quad (53)$$

Aus

$$\tilde{x} = r \sin \tilde{\vartheta} \cos \tilde{\varphi}, \quad \tilde{y} = r \sin \tilde{\vartheta} \sin \tilde{\varphi}, \quad \tilde{z} = r \cos \tilde{\vartheta}$$

ergibt sich unter Beachtung von $\tilde{\vartheta} \equiv \pi/2$

$$\begin{aligned} \partial_r &= (\cos \tilde{\varphi} \partial_{\tilde{x}} + \sin \tilde{\varphi} \partial_{\tilde{y}}) \\ r \partial_{\tilde{\varphi}} &= -\sin \tilde{\varphi} \partial_{\tilde{x}} + \cos \tilde{\varphi} \partial_{\tilde{y}} \end{aligned} \quad (54)$$

und folglich wird (53) zu

$$\begin{aligned} \left(\gamma^{(2)}\right)' &= \frac{E_2}{h_2} \partial_t + \\ &+ \left(\cos \tilde{\varphi} \sqrt{E_2^2 - V_2} - \frac{L_2 \sin \tilde{\varphi}}{r^{(2)}} \right) \partial_{\tilde{x}} + \\ &+ \left(\sin \tilde{\varphi} \sqrt{E_2^2 - V_2} + \frac{L_2 \cos \tilde{\varphi}}{r^{(2)}} \right) \partial_{\tilde{y}} \end{aligned} \quad (55)$$

Wegen (52) ist

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{x}} &= s_{11} \partial_x + s_{21} \partial_y + s_{31} \partial_z \\ \partial_{\tilde{y}} &= s_{12} \partial_x + s_{22} \partial_y + s_{32} \partial_z \end{aligned} \quad (56)$$

Da die Tangente $(\gamma^{(2)})'$ im Durchschnitt beider Tangentialebenen liegen soll (siehe (47)), muß der Koeffizient vor ∂_z verschwinden:

$$\left(\cos \tilde{\varphi} \sqrt{E_2^2 - V_2} - \frac{L_2 \sin \tilde{\varphi}}{r^{(2)}} \right) s_{31} + \left(\sin \tilde{\varphi} \sqrt{E_2^2 - V_2} + \frac{L_2 \cos \tilde{\varphi}}{r^{(2)}} \right) s_{32} = 0 \quad (57)$$

Setzen wir die Werte für s_{ij} ein

$$\left(\cos \tilde{\varphi} \sqrt{E_2^2 - V_2} - \frac{L_2 \sin \tilde{\varphi}}{r^{(2)}} \right) \sin \theta = 0 \quad (58)$$

Das bedeutet, damit im Raumteil die Tangente an $\gamma^{(2)}$ im Andock-Punkt $a^{(2)}$ im Durchschnitt der beiden Orbitalebene liegt, muß entweder

$$\theta = 0$$

oder im Andock-Punkt

$$r^{(2)} \sqrt{E_2^2 - V_2} \cos \tilde{\varphi} = L_2 \sin \tilde{\varphi}.$$

Zusammengefaßt, entweder fallen beide Orbitalebene mit der Äquatorialebene zusammen oder in den Andock-Punkten gilt

$$\begin{aligned} r^{(1)} \sqrt{E_1^2 - V_1} \cos(\varphi - \phi) &= L_1 \sin(\varphi - \phi), \\ r^{(2)} \sqrt{E_2^2 - V_2} \cos \tilde{\varphi} &= L_2 \sin \tilde{\varphi} \end{aligned} \quad (59)$$

Wir nehmen zunächst an, die beiden Orbitalebene fallen zusammen und das Koordinatensystem sei so gewählt, daß die Orbitalebene die Äquatorialebene sind. Dann haben die beiden Tangenten die Form

$$\left(\gamma^{(j)}\right)' = \frac{E_j}{h_j} \partial_t + \sqrt{E_j^2 - V_j} \partial_r + L_j \partial_\varphi, \quad (60)$$

Die Tangentialgeraden fallen in diesem Fall dann und nur dann zusammen, wenn

$$\begin{aligned} L_2 \sqrt{E_1^2 - V_1} \Big|_{a^{(1)}} &= L_1 \sqrt{E_2^2 - V_2} \Big|_{a^{(2)}} \\ E_1 L_2 h_2 \Big|_{a^{(2)}} &= E_2 L_1 h_1 \Big|_{a^{(1)}} \end{aligned} \quad (61)$$

Nimmt man zusätzlich an, die Andock-Punkte seien Apo- oder Perihel der Geodäte, so vereinfacht sich wegen

$$V_j(r^{(j)}) = \left(1 + \frac{L_j^2}{(r^{(j)})^2}\right) h_j(r^{(j)}) = E_j^2$$

(61) zu

$$E_1 L_2 h_2 \Big|_{a^{(2)}} = E_2 L_1 h_1 \Big|_{a^{(1)}} \quad (62)$$

Beide Orbitalebene seien unterschiedlich und (59) sei notwendiger Weise erfüllt. Wir nehmen jetzt sofort an, die Andock-Punkte seien Peri- oder Apohel der entsprechenden Elektronen-Geodäte. Dann gilt wegen (59) in den Andock-Punkten $\phi = \varphi$ und $\tilde{\varphi} = 0$ und die beiden Tangenten in den

Andock-Punkten sind unter Beachtung von (44) und (56)

$$\begin{aligned}
(\gamma^{(1)})' &= \frac{E_1}{h_1} \partial_t + L_1 \partial_\varphi, \\
&= \frac{E_1}{h_1} \partial_t - \frac{L_1 \sin \phi}{r^{(1)}} \partial_x + \frac{L_1 \cos \phi}{r^{(1)}} \partial_y \\
(\gamma^{(2)})' &= \frac{E_2}{h_2} \partial_t + \frac{L_2}{r^{(2)}} \partial_{\tilde{y}} \\
&= \frac{E_1}{h_1} \partial_t - \frac{L_2}{r^{(2)}} \sin \phi \partial_x + \frac{L_2}{r^{(2)}} \cos \phi \partial_y
\end{aligned} \tag{63}$$

Da die Koeffizienten vor ∂_z verschwinden müssen (der Durchschnitt der Orbitalebene liegt in der Äquatorialebene) gilt $\phi = 0$. Das zusammenfallen der Tangentialgeraden in diesem Fall ergibt dann

$$E_1 L_2 r^{(1)} \Big|_{a^{(1)}} h_2 \Big|_{a^{(2)}} = E_2 L_1 r^{(2)} \Big|_{a^{(2)}} h_1 \Big|_{a^{(1)}} \tag{64}$$

Somit ist folgende Definition sinnvoll

Definition (Molekül). Eine n -blättrige Schwarzschild-Überlagerung (n Atome) (Cs, \mathbb{R}^4, π) heißt Molekül, wenn es eine Folge von Zifferpaaren $\{i, j\}$ mit $i, j = 1, \dots, n$ derart gibt, daß

- (1) jede der Ziffern (Atome) $1, 2, \dots, n$ mindestens einmal vorkommt,
- (2) für jedes Ziffern paar $\{i, j\}$ besteht zwischen dem i -ten und j -tem Blatt der Schwarzschild-Überlagerung eine chemische Bindung.

□

Definition (chemische Bindung). Es sei (Cs, \mathbb{R}^4, π) eine Schwarzschild-Überlagerung. Zwei Blätter $(\mathbb{R}^4, g^{(j)})$, $j = 1, 2$ heißen chemisch gebunden, wenn in der äußeren Elektronen-Schale des einen Blattes (Atoms) eine potentielle nicht belegte Elektronen-Geodäte $\gamma^{(1)}$ und im zweiten Blatt (Atom) in der äußeren Schale eine (belegte) Elektronen-Geodäte $\gamma^{(2)}$ (mit der Energie E_j und dem Drehimpuls L_j) derart existieren, daß auf jeder dieser Elektronen-Geodäte ein Apo- oder Perihel $a^{(j)}$, $j = 1, 2$ - die Andock-Punkte - so existieren, daß sich die jeweils um $a^{(j)}$ parallel verschobenen Blätter im Koordinatenursprung 1. Ordnung berühren.

Berührung erster Ordnung bedeutet:

Entweder die Orbitalebene beider Blätter fallen zusammen und

$$\frac{E_1}{L_1 h_1} \Big|_{a^{(1)}} = \frac{E_2}{L_2 h_2} \Big|_{a^{(2)}} \tag{65}$$

oder die Orbitalebene beider Blätter sind unterschiedlich und die beiden Andock-Punkte liegen im Raumteil in der Ebene senkrecht zur Schnittgera-

den der Orbitalebene und es gilt

$$\frac{E_1 r^{(1)}}{L_1 h_1} \Big|_{a^{(1)}} = \frac{E_2 r^{(2)}}{L_2 h_2} \Big|_{a^{(2)}} \quad (66)$$

□

Offensichtlich existiert im zweiten Fall ein durch Rotation des Raumteils erreichbares Koordinatensystem so, daß die beiden Andock-Punkte in der xy -Ebene liegen und die beiden Orbitalebene stehen senkrecht auf der xy -Ebene. Die Andock-Punkte sind Apo- oder Perihel der Geodäten. Die Orbits sind also in den Andock-Punkten lokal konvex, in der Orbitalebene ist der Orbit komplett auf einer Seite der Tangente (Schnittgerade beider Orbitalebene). Da die sich die in der jeweiligen Orbitalebene verschobenen Orbits berühren und nicht schneiden (auch nicht mit weiter innen liegenden Elektronen-Geodäten) liegen die Geodäten auf unterschiedlichen 'Seiten' bezüglich der Schnittgeraden der Orbitalebene. Somit haben sind die Elektronen-Geodäten auf unterschiedlichen 'Schrägen' des 'Daches' aus den Orbitalebene mit der Schnittgeraden als Dachfirst. Die Tangente im Apo- oder Perihel einer Elektronen-Geodäte steht senkrecht auf dem Radiusvektor des Andock-Punktes. Damit ergibt sich wieder die in der Definition beschriebene Situation der Lage der Elektronen-Geodäte. Übrigens daraus folgt auch im ersten Fall, daß die beiden Radius-Vektoren in der gemeinsamen Orbitalebene eine Gerade bilden müssen.

Anschaulich bedeutet die chemische Bindung, daß ein Elektron auf seiner neuen Bahn beide Atomkerne umkreist. Die Bahn ist eine 'Acht' mit den Atomkernen im jeweiligen Bogen. Diese 'Acht' liegt im Raumteil entweder in einer Ebene oder die Zentren der beiden Bögen der 'Acht' liegen in einer Ebene die senkrecht zur Tangente im Knoten der Acht steht. Anders gesagt im zweiten Fall existiert ein durch Rotation des Raumteils erreichbares Koordinatensystem so, daß die beiden Andock-Punkte in der xy -Ebene liegen und die beiden Orbitalebene stehen senkrecht auf der xy -Ebene. Man kann sich das Raumteilbild als ein Dach vorstellen auf dem eine Acht gezeichnet ist. Entweder ist es ein Flachdach oder der Knoten der Acht liegt auf dem Dachfirst und die Zentren der beiden Acht-Bögen sind senkrecht zum Dachfirst.

Die Frage nach dem Winkel dieses 'Spitzdaches' kann in diesem Modell nicht beantwortet werden, da die Blätter als voneinander unabhängig betrachtet wurden. Das bedeutet in einem weiter verfeinertem Modell ist ein zusätzlicher Zusammenhang zwischen den Blatt-Metriken $g^{(j)}$ anzunehmen. Darauf haben wir hier verzichtet. Für diesen Zusammenhang zwischen den Blättern ist ein Raumzeit-Modell mit zwei Gravitationszentren anzusetzen. Zudem

gibt es hier ein Zusammenspiel von Gravitation und Elektromagnetismus. Es ist zu erwarten, daß der Winkel des 'Dachfirstes' recht groß sein muß. Mit anderen Worten, Moleküle haben eine recht flache Grundstruktur.

An dieser Stelle noch eine Bemerkung. In unserem Modell sind wir vom Fehlen äußerer Einflüsse ausgegangen. Natürlich können äußere Einflüsse - wie z.B. hoher Druck beim Kohlenstoff schafft Diamanten, Tetraeder-Strukturen - die Lage der Orbitalebene zueinander verändern und somit zu anderen Molekülformen kommen.

In den Skizzen 1 und 2 sind die ebene und die Dachstruktur im Raumteil skizziert.

6 summery

Die vorliegende Arbeit ist der dritte und letzte Teil einer 'Trilogie' zur Schwarzschild-Raumzeit. Im ersten Teil ([2]) wurde gezeigt, daß die 'Planeten-Geodäten' einer Schwarzschild-Raumzeit räumlich alle in einer Ebene liegen. Methode waren hier die geometrische Eigenschaften von speziellen Rotationen im Raumteil der Schwarzschild-Raumzeit. In der vorliegenden Arbeit ist dieses Ergebnis dahingehend verschärft, daß diese Ebene nicht irgendeine ist, sondern die Äquatorialebene des Koordinatensystems in dem die Schwarzschild-Metrik in der bekannten einfachen gegeben ist.

Im zweiten Teil der 'Trilogie' wurde das Modell der Schwarzschild-Raumzeit auf das Atom angewandt. Durch genauere Betrachtung der Periheldrehung und der damit zusammenhängenden elliptischen Integrale wurden die Besonderheiten der Elektronen-Geodäten eines Atoms herausgearbeitet. Im vorliegenden dritten Teil wurde der Versuch gestartet das Modell einer einzelnen Schwarzschild-Raumzeit zu verlassen. Auf das Molekül - die Verbindung mehrerer Atome - ist als Ganzes das Modell der Schwarzschild-Raumzeit nicht anwendbar; es gibt kein (Gravitations-) Zentrum. Folgerichtig ist der Schritt von einer einzelnen Schwarzschild-Raumzeit zu einer Überlagerung mehrerer Schwarzschild-Raumzeiten vorgezeichnet. Damit entsteht sofort die Notwendigkeit die Veränderung der Darstellung der Schwarzschild-Metrik in unterschiedlichen Koordinatensystemen zu betrachten. Dem ist insbesondere der 3. Abschnitt gewidmet. Bei der Modell-Konstruktion der Verbindung mehrerer Atome spielt die Orbitalebene eine ähnliche Rolle wie die Periheldrehung im Atommodell ([3]ä). Letztlich wird formuliert unter welchen Bedingungen im vorgesehenen Modell Atome eine Verbindung eingehen können. Dabei fällt auf, daß viele Moleküle flach sein müssen. Das entspricht auch der beobachteten Realität. Aber auch andere Strukturen sind möglich.

In unserem Modell werden Bedingungen ohne äußere Einflüsse formuliert. Durch äußere Einflüsse kann die Orientierung der Orbitalebene zueinander verändert werden und man erhält andere Molekülstrukturen. Z.B. Kohlenstoff, durch hohen Druck kann man die eigentlich identischen Orbitalebene in ihrer Orientierung so verändern, daß eine Tetraeder-Struktur der Kohlenstoff-Atome entsteht, der Diamant. Die häufig gestellte Frage nach der räumlichen Lage der Atomkerne in einer chemischen Verbindung ist im entwickelten Modell nur grundsätzlich erklärbar. Hierzu ist dieser Teil mit dem zweiten Teil der 'Trilogie' zu kombinieren. Aus der Frequenz der stehenden Welle der äußeren Elektronen-Geodäte und dem hier vorgestellten relativistischen Molekül-Modell kann ein Lagezusammenhang hergestellt werden. Es sei noch eine These erlaubt. Ein im Andock-Punkt $a^{(j)}$ startendes Photon würde sich entlang der Photonene-Geodäte γ_j bewegen. Die Andock-Bedingung (66) läßt folgende Interpretation zu. Der Stoßparameter b_j der Photonen-Geodäte γ_j sei $b_j = L_j/E_j$. Wenn $\eta_j = \text{Winkel}(-\partial_r, \vec{\gamma}'_j)$ so bedeutet (66)

$$\sqrt{h_1} \sin \eta_1 = \sqrt{h_2} \sin \eta_2 \quad (67)$$

In Abhängigkeit von der Größe des Stoßparameters würden Photonen vom Andock-Punkt den Atomkern 'crash', 'grazing' oder 'flyby' begegnen. Der Winkel zwischen den Atomkernen in der xy -Ebene (Winkel zwischen den Orbitalebene) könnte dann $\pi - \eta_1 - \eta_2$ sein, wobei $r^{(j)} \sin \eta_j = b_j \sqrt{h_j}$.

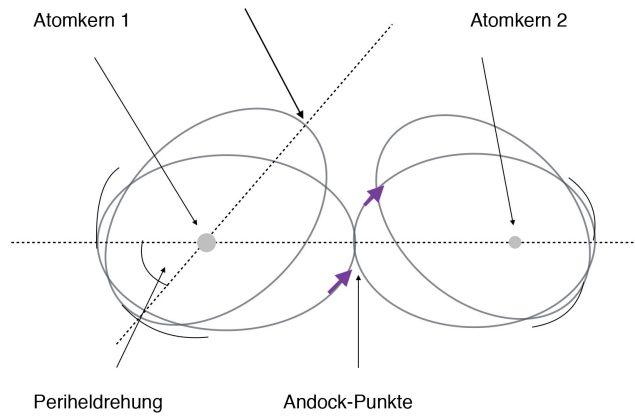
Literaturverzeichnis

- [1] **Subrahmanyan Chandrasekhar**, The mathematical theory of black holes, Oxford University Press, 1983, 1992.

- [2] **Dr. sc. Petra Schopf, Dr. Siegfried Greschner**, About the Schwarzschild-Spacetime, <http://www.drschopf.de/public/img/Solar%20System.pdf>.

- [3] **Dr. sc. Petra Schopf**, Entwicklung eines relativistischen Atommodells, <http://www.drschopf.de/public/img/Atom.pdf>.

potentieller Andocke-Punkt für andere Elektronen-Geodäten
mit gleichem Orbit, dabei darf keine Überschneidung geben



In der Elektronenschale existieren mehrere Elektronen-Geodäten mit gleichem Orbit.

Figure 1. Andocken im ebenen Fall

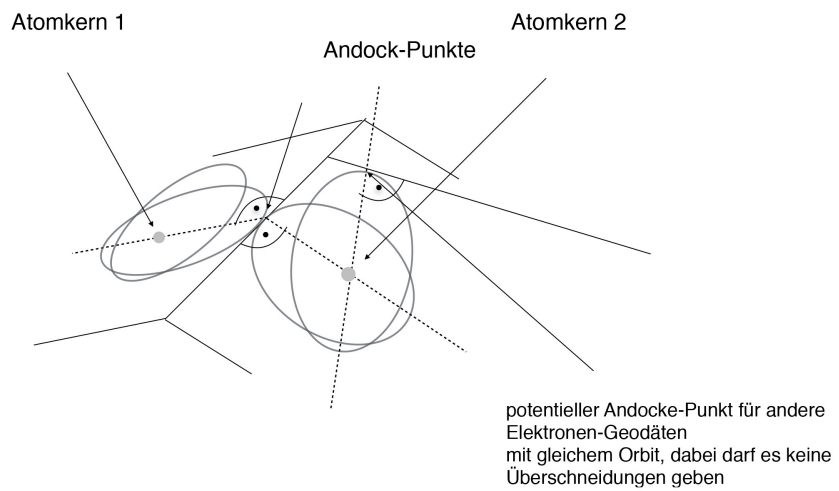


Figure 2. Andocken im Dach-Fall